Univerzitet u Sarajevu
Elektrotehnički fakultet Sarajevo
M. Kušljugić, M. Hajro
Elementi i metode u analizi električnih kola
Univerzitet u Tuzli
2005.

Chapter 1

Predgovor

Knjiga **"Elementi i metodi u analizi električnih kola"** (knjiga 1) predstavlja jedinstvenu cjelinu sa knjigama:

- **"Analiza električnih kola u vremenskom domenu"** (knjiga 2)
- **"Analiza električnih kola u frekventnom domenu"** (knjiga 3)
- **"Specijalna električna kola"** (knjiga 4)

sa kojima čini *ediciju* koja pokriva sadržaj naučne oblasti **Teorija električnih kola**. Namjena edicije je da omogući studentima elektrotehničkih fakulteta savladavanje gradiva u domenu *Analize kontinualnih, linearnih, vremenski nepromjenljivih* električnih kola i sistema, što predstavlja osnovu za proučavanje složenijih problema, kojima se bavi Teorija električnih kola i Analiza dinamičkih sistema.

Predmet "Teorija električnih kola" izučava se na drugoj godini studija elektrotehnike. Materijal obradjen u ediciji pretpostavlja da studenati posjeduju odgovarajuća znanja iz oblasti linearne algebre i diferencijalnih jednačina iz matematike i da poznaju osnovne pojmove i tehnike rješavanja električnih kola, koje se obradjuju u osnovama elektrotehnike. Savremeni program Teorije električnih kola zahtijeva da se u predmetu obrade ne samo osnovni pojmovi i tehnike rješavanja električnih kola, nego i da se postave metodološke osnove za analizu složenih električnih mreža i analizu dinamičkih sistema, koje se izučavaju na specijalističkim predmetima na višim godinama studija. Zato je materija, koja je izložena u ovoj ediciji, obradjena na konceptualnoj osnovi koja omogućava:

- Razumjevanje opšteg koncepta analize inženjerskih problema, ilustrovanog na primjerima rješavanja električnih kola.
- Upoznavanje sa osnovama koncepta Teorije sistema i Analize dinamičkih sistema, izborom sistemskog pristupa pri modelovanju, rješavanju i analizi vremenski kontinualnih, linearnih električnih kola.

- Primjenu savremenih računarskih postupaka u analizi dinamičkih sistema, koji su pogodni za algoritamsko rješavanja pomoću digitalnih računara, što je ilustrovano na primjerima modelovanja i rješavanja električnih kola primjenom matričnih metoda.

Zbog toga ova edicija može korisno poslužiti i inženjerima i istraživačima, koji se u svom radu susreću sa problemima analize dinamički sistema, kao sistematičan uvod u ovu kompleksnu problematiku.

U knjizi "Elementi i metodi u analizi električnih kola" prvo su definisani fundamentalni pojmovi signala i sistema iz teoriji sistema, koji predstavljaju metodološku osnovu za izučavanje oblasti analize električnih kola u ovoj ediciji. Zatim su definisane karakteristike *elemenata električnih kola* sa koncentrisanim parametrima sa jednim i dva pristupa. Pri tome je posebna pažnja posvećena objašnjenju fizikalnosti energetskih procesa u elementima i njihovom opisivanju pomoću vanjskih *vi* karakteristika. Detaljno su obradjene karakteristike i načini vezivanja linearnih, vremenski nepromjenljivih elemenata. Potom su opisani matrične forme *metoda* električnih mreža, koji se koriste pri rješavanju složenih mreža pomoću digitalnih računara.

Sadržaj knjige podijeljen je u 8 poglavlja. U poglavlju 1 **"Osnovi teorije električnih kola"** definisani su osnovni pojmovi i zakoni električnih kola. Na osnovu koncepta idealnog elementa, koji je analogan sa konceptom elementarne čestice u fizici, opisane su karakteristike elemenata sa koncentrisanim parametrima. Za varijable koje opisuju stanje elementa, napon i struju pristupa, i za apstraktni koncept kola izvedeni su izrazi za Kirhofove zakone, koji za idealne elemente predstavljaju aproksimaciju Maksvelovih zakona. Definisan je pojam ulazne snage elementa, te izveden princip održanja snage u kolu, koji općenito vrijedi za zatvorene sisteme.

U poglavlju 2 **"Osnovi teorije sistema"** definisan je koncept sistema u kome se na osnovu apstrakcije procesa unutar sistema njegova interakcija sa okruženjem predstavlja preko vanjskih, ulaznih i izlaznih, signala. Obradjeni su matematički modeli standardnih signala i izvršena je klasifikacija signala i sistema. Definisane su karakteristike statičkih i dinamičkih sistema. Posebno su izvedene osobine linearnih vremenski nepromjenljivih (LVN) sistema.

U poglavlju 3 **"Statički elementi kola sa jednim pristupom"** obradjene su karakteristike i klasifikacija otpornika i generatora, kao elemenata u kojima se transformacija energije odvija trenutno. Opisani su načini vezivanja ovih elemenata, te izvedeni izrazi za snagu i energiju kao i uslov pasivnosti. Za LVN kola koja sadrže otpornike i generatore izvedeni su modeli ekvivalentnog Tevenenovog i Nortonovog generatora. Konačno, opisani su vremenski oblici funkcija kojima se modeluju standardni pobudni signali.

U poglavlju 4 **"Dinamički elementi kola sa jednim pristupom"**, obradjene su karakteristike elemenata kola koji imaju mogućnost akumuliranja električne energije: kondenzatora i zavojnice. Posebno je opisana osobina ovih eleme-

nata da se protive trenutnoj promjeni akumulirane energije. Izveden je model ekvivalentnog generatora početne vrijednosti, pomoću koga se predstavlja uticaj akumulirane energije na odziv dinamičkih elemenata. Definisani su uslovi za povezivanje i izvedeni su izrazi za izračunavanje ekvivalentnih kondenzatora i zavojnica za rednu i paralelnu vezu. Za kola koja pored kondenzatora (zavojnica) sadrže i generatore opisani su modeli ekvivalentnog (Tevenenovog) kola u odnosu na posmatrani pristup. Izvedeni su izrazi za snagu, ulaznu (predanu) energiju i akumuliranu energiju kao i uslov pasivnosti. Konačno, na kraju poglavlja, opisan je model opšteg elementa sistema sa jednim pristupom, koji predstavlja generalizaciju izvedenih modela elemenata kola. Prenosna karakteristika opšteg elementa definiše se pomoću podužnih $y(t)$ i poprečnih $x(t)$ varijabli stanja, čiji je proizvod jednak trenutnoj vrijednosti snage $p(t)$, koja se predaje elementu. Koncept opšteg elementa je ilustrovan na primjerima modela elemenata sa jednim pristupom u translatornim i rotirajućim mehaničkim sistemima. Za ove sisteme definisan je pojam analognih elemenata.

U poglavlju 5 **"Elementi kola sa dva pristupa"**, obradjeni su modeli magnetno spregnutih zavojnica, zavisnih generatora i pojačala signala, kao elemenata sa dva pristupa i izvedene su jednačine za opšti element kola sa dva pristupa (četveropol). Za magnetno spegnute zavojnice izvedeni su matrični oblik jednačina, izrazi za rednu i paralenu vezu te ekvivalentne šeme i uslovi pasivnosti. Posebno je obradjen specijalni slučaj sprezanja zavojnica: idealni transformator. Zavisni naponski i strujni generatori i pojačala signala definisani su kao spregnuti elementi sa dva pristupa. Na primjeru stacionarnog kola odziva pri sinusnoj pobudi izvedeni su oblici jednačina opšteg četveropola pomoću z, y, a, b, h i g parametara i izrazi za rednu, paralelnu i kaskadnu vezu četveropola. Na kraju definisan je opšti model četveropola pomoću podužnih i poprečnih varijabli.

U poglavlju 6 **"Grafovi električnih mreža"** definisan je koncept geometrijskog grafa mreže i izvedeni su matrični oblici jednačina za Kirhofove zakone za struje čvorova i napone zatvorenih puteva. Zatim su opisani pojmovi subgrafova kontura, petlja i presjek za koje su izvedeni matrični oblici jednačina Kirhofovih zakona za struje i napone. Konačno definisan je pojam dualnih grafova i dualnih mreža.

U poglavlju 7 **"Matrični metodi rješavanja električnih mreža"** na primjeru rezistivnih mreža izvedeni su matrični oblici jednačina za metode napona čvorova i napona presjeka te struja petlji i struja kontura. Primjena ovih metoda ilustrovana je na primjerima rješavanja stacionarnog odziva LVN mreža pri sinusnim pobudama.

U poglavlju 8 **"Teoreme električnih mreža"** izvedene su i dokazane teoreme koje vrijede za električna kola: Telegenova teorema, teoreme substitucije, superpozicije i reciprociteta kao i Tevenenova (Nortonova) teorema. Primjena teorema ilustrovana je za stacionarni odziv LVN kola pri sinusnoj pubudi.

Chapter 1

Osnovi teorije električnih kola

Teorija električnih kola je naučna oblast elektrotehnike u kojoj se analiziraju električna kola, pomoću kojih se šematski predstavljaju matematički modeli elektromagnetnih procesa u realnim fizičkim komponentama/sistemima. Modelovanje procesa u realnim fizičkim sistemima bazirano je na fizičkim zakonima, koji vrijede za posmatrane procese, iz kojih se izvode odgovarajući matematički modeli. U teoriji električnih kola koriste se idealni modeli fizičkih komponenti. U idealnom modelu opisuje se samo osnovni fizički proces u komponenti, dok se sporedne pojave zanemaruju. Tako se pomoću idealne zavojnice opisuje samo proces akumuliranja elektromagnente energije, a pomoću idealnog kondenzatora samo proces akumuliranja elektrostatičke energije. Koncept idealnog elementa električnog kola omogućava izvodjenje praktično upotrebljivih modela elektromagnetnih procesa u realnim fizičkim sistemima.

Elektromagnetni procesi u fizičkim komponentama opisani su u modelu električnog kola pomoću napona v i struja i, koji se nazivaju varijable stanja. Idealni modeli jednostavnih elektromagnetnih procesa su standardizovani i čine skup idealnih elemenata kola. Koncept idealnog elementa kola analogan je konceptu elementarne čestice, koji se koristi u izvodjenju idealnih modela fizičkih procesa u mehanici. Složeni elektromagnetni procesi opisuju se pomoću složenih kola, koja sadrže više medjusobno povezanih idealnih elemenata. Osobine složenih kola odredjuje interakcija povezanih elemenata, odnosno karakteristike elemenata i način njihovog povezivanja. Matematički model interakcije elemenata u složenom kolu opisuje se jednačinama, koje definišu ograničenja na varijable stanja kola.

1.1 Elementi sa koncentrisanim parametrima

Pošto karakteristike elemenata značajno odredjuju ponašanje kola, proučavanje teorije električnih kola počinje obradom karakteristika standardizovanih idealnih

elemenata. Električna kola, obradjena u osnovama elektrotehnike, sadrže elemente sa koncentrisanim parametrima, koji imaju dva kraja ili pola. Sa aspekta modelovanja sistema ovakva kola su analogna modelima u mehaničkim sistemima, koji su definisani na konceptu elementarne čestice. Prema analogiji sa modelima mehaničkih sistema, kod kojih se zanemaruju njihove fizičke dimenzije, kod modela elemenata sa koncentrisanim parametrima zanemaruju se njihove dimenzije u odnosu na talasnu dužinu elektromagnetnih talasa signala kola. Na taj način se elektromagnetni procesi i ponašanje komponenti opisuju pomoću "vanjskih karakteristika", odnosno koristeći model "crne kutije". Na slici 1.1 prikazana je šema opšteg elementa kola sa koncentrisanim parametrima, koji ima dva pola. Elementi sa dva pola nazivaju se dvopolni elementi ili elementi sa jednim pristupom. Preko polova/pristupa element ostvaruje vezu sa preostalim dijelom kola. Općenito, elementi mogu imati jedan ili više pristupa preko kojih se povezuju u kolo. Za dvopolni element sa koncentrisanim parametrima u ovoj knjizi se koristi skraćeni naziv: *element kola*.

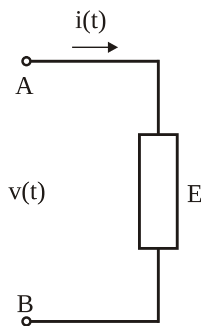


Figure 1.1: Šema opšteg elementa sa jednim pristupom

Elektromagnetni procesi u elementima kola definišu vezu izmedju varijabli stanja, napona v i struja i, koja se izražava relacijom:

$$F(v, i, t) = 0 \tag{1.1}$$

Relacija 1.1 opisuje vi karakteristiku elementa i u opštem slučaju predstavlja integro-diferencijalnu jednačinu nezavisne varijable vremena t. Kod elementa sa jednim pristupom struja pristupa je struja kroz element, a napon pristupa je napon izmedju krajeva elementa. Kod elementa sa koncentrisanim parametrima struja na ulaznom polu pristupa elementa jednaka je struji na izlaznom polu pristupa. Struja i napon pristupa jednoznačno definišu energetsko stanje elementa. Energetsko stanje kola podrazumjeva raspodjelu elektromagnetne energije u kolu izmedju njegovih elemenata. Modelovanje elektromagnetnih procesa pomoću struja i napona u kolu predstavlja konceptualnu osnovu za izvodjenje zakona i metoda u teoriji elektičnih kola.

U teoriji električnih kola, analogno sa Njutnovim zakonima u fizici, odnosi

izmedju varijabli stanja, struja $i(t)$ i napona $v(t)$ pristupa elemenata, definisani su Kirhofovim zakonima. Uz uslov zanemarenja dimenzija elemenata Kirhofovi zakoni predstavljaju aproksimaciju Maksvelovih zakona. Premda predstavljaju aproksimaciju, Kirhofovi zakoni zadovoljavaju zahtjeve inženjerskih proračuna i imaju veliki praktični i teorijski značaj. Kirhofovi zakoni definišu odnose izmedju struja $i(t)$ i napona $v(t)$ u kolu, nezavisno od vi karakteristika njegovih elemenata i predstavljaju ograničenja koja uslovljava geometrija (topologija) kola. Zato se pri pisanju Kirhofovih zakona električno kolo može posmatrati kao apstraktan skup medjusobno povezanih elemenata, u kome su definisana ograničenja za njegove varijable stanja.

U apstraktnom konceptu električnog kola sa koncentrisanim parametrima elementi kola sa jednim pristupom nazivaju se grane kola, a polovi pristupa krajevi grana. Napon na elementu $v(t)$ naziva se napon grane, a struja kroz element $i(t)$, struja grane. Karakteristika elementa $F(v, i, t) = 0$ predstavlja matematički model grane. U cilju jednoznačnog definisanja vi karakteristike elementa, usvajaju se usaglašeni, referentni smjerovi napona $v(t) > 0$ i struje $i(t) > 0$ grane kola, kao što je prikazano na slici 1.2.

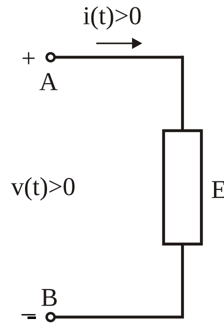


Figure 1.2: Usaglašeni smjerovi napona $v(t)$ i struje $i(t)$ grane kola

Za usaglašene smjerove varijabli stanja grane, struja $i(t)$ izlazi iz kraja A (tačka višeg potencijala napona $v(t)$), a ulazi u kraj B (tačka nižeg potencijala). Trenutna vrijednosti snage $p(t)$ koja se predaje elementu/grani naziva se ulazna snaga i za usaglašene smjerove napona $v(t)$ i struje $i(t)$ definiše se relacijom:

$$p(t) = v(t)\, i(t) \tag{1.2}$$

Snage elemenata $p(t)$ nisu varijable stanja pošto se mogu izračunati iz poznatih vrijednosti napona i struja grana. Energija koja se predaje elementu u intervalu $[t_0, t]$ izražava se relacijom:

$$w(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} p(\tau)\, d\tau = \int_{t_0}^{t} v(\tau) i(\tau)\, d\tau \tag{1.3}$$

Ukoliko vrijedi $w(t_0, t) < 0$ element predaje energiju u kolo, odnosno ponaša se kao

izvor. U tom slučaju može se definisati izlazna snaga elementa p_i prema relaciji:

$$p_i(t) = -\,p(t) = -\,v(t)\,i(t) = -\,i(t)\,v(t) \tag{1.4}$$

1.2 Osnovni zakoni električnih kola

U električnom kolu sa koncentrisanim parametrima vrši se razmjena energije izmedju njegovih elemenata. Ukoliko se posmatra sa aspekta teorije sistema, električno kolo predstavlja zatvoren sistem obrazovan medjusobnim povezivanjem elemenata. To znači da unutar kola u svakom trenutku postoji ravnoteža izmedju ulaznih i izlaznih snaga njegovih povezanih elemenata. Povezivanje elemenata kola ostvaruje se spajanjem njihovih krajeva, što odgovara operaciji algebarskog sumiranja struja elemenata. U apstraktnom konceptu električnog kola elementi predstavljaju grane kola, a tačke u kojima se spajaju krajevi grana nazivaju se čvorovi kola. Zatvorena linija duž sukcesivno povezanih grana kola naziva se kontura. Kontura koja u unutrašnjosti ne sadrži ni jednu granu naziva se petlja. Grane, čvorovi i konture kola obično se numerički označavaju. Šema kola predstavlja simbolički model koji opisuje način povezivanja elemenata, odnosno geometriju/topologiju kola. Na slici 1.3 prikazana je šema električnog kola na kojoj su numerisani grane i čvorovi.

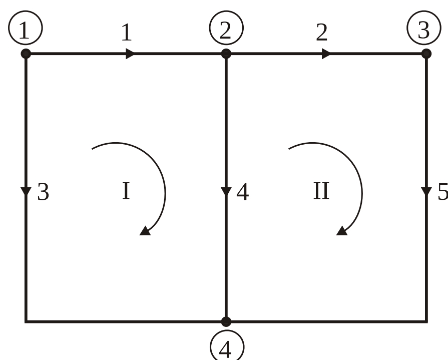


Figure 1.3: Šema električnog kola

Za svaku granu kola pretpostavlja se da je poznata odgovarajuća *vi* karakteristika. Struje i naponi grana kola nisu medjusobno nezavisne veličine nego su njihovi odnosi odredjeni jednačinama Kirhofovih zakona. Kirhofovi zakoni uvode linearna ograničenja, u formi linearnih algebarskih jednačina, za varijable stanja kola. Ove jednačine su nezavisne od *vi* karakteristika elemenata i predstavljaju topološka ograničenja, koja vrijede za zatvorene sisteme. Prema tome, jednačine Kirhofovih zakona i *vi* karaketristike elemenata jednoznačno odredjuju varijable stanje kola: napone i struje grana, a time i energetsko stanje kola.

Kirhofov zakon za struje (KZS) opisuje princip konzerviranja naelektrisanja u čvorovima kola i glasi:

- *Za svaki čvor u kolu algebarski zbir struja grana, koje se stiču u njemu, jednak je nuli u svakom trenutku.*

Algebarski zbir se definiše u odnosu na usvojeni pozitivni referentni smjer čvora, koji može biti usmjeren ka čvoru ili od čvora. Uobičajeno se za pozitivan smjer usvaja smjer prema čoru. Ukoliko pomoću koeficijenta A_{kj} definišemo odnos čvora k i grane j, mogući su sljedeći slučajevi:

$[A_{kj} = +1]$ - grana j je vezana za čvor k i njihove orijentacije se poklapaju.

$[A_{kj} = -1]$ - grana j je vezana za čvor k i njihove orijentacije se ne poklapaju.

$[A_{kj} = 0]$ - grana j nije vezana za čvor k.

Jednačinu prema KZS za čvor k tada možemo pisati u obliku:

$$\sum_{j=1}^{N_g} A_{kj} i_j = 0 \tag{1.5}$$

gdje je N_g broj grana kola. Jednačine prema KZS mogu se napisati za svih $N_č$ čvorova.

Kirhofov zakon za napone (KZN) opisuje medjuzavisnost napona grana u konturi i glasi:

- *Za svaku konturu u kolu algebarski zbir napona grana, koje pripadaju konturi, jednak je nuli u svakom trenutku.*

Algebarski zbir se definiše u odnosu na usvojeni pozitivni, referentni smjer konture, koji može biti u smjeru kazaljke na satu ili u smjeru suprotnom smjeru kazaljke na satu. Ukoliko pomoću koeficijenta B_{kj} definišemo odnos konture k i grane j, mogući su sljedeći slučajevi:

$[B_{kj} = +1]$ - grana j pripada konturi k i njihove orijentacije se poklapaju.

$[B_{kj} = -1]$ - grana j pripada konturi k i njihove orijentacije se ne poklapaju.

$[B_{kj} = 0]$ - grana j ne pripada konturi k.

Tada jednačinu prema KZN za konturu k možemo pisati u obliku:

$$\sum_{j=1}^{N_g} B_{kj} v_j = 0 \tag{1.6}$$

Iz jednačina prema Kirhofovim zakonima jednostavno se izvodi princip o balansu ulaznih snaga grana kola (*princip o održanju snage*), koji glasi:

- *Zbir ulaznih snaga svih grana električnog kola jednak je nuli u svakom trenutku.*

Za usaglašene smjerove napona i struja princip o održanju snage izražava se relacijom:

$$\sum_{j=1}^{N_g} p_j(t) = \sum_{j=1}^{N_g} v(j)\, i(j) = 0 \tag{1.7}$$

Ako za prvih m elemenata kola umjesto ulaznih p definišemo izlazne p_i snage, princip o održanju snage možemo izraziti jednačinom:

$$-\sum_{j=1}^{m} (p_i)_j(t) + \sum_{j=m+1}^{N_g} p_j(t) = 0$$

odnosno relacijom:

$$\sum_{j=1}^{m} (p_i)_j(t) = \sum_{j=m+1}^{N_g} p_j(t) \tag{1.8}$$

Iz prethodne relacije može se izvesti sljedeća definicija principa o održanju snage:

- *Zbir izlaznih snaga elemenata koji odaju energiju jednak je zbiru ulaznih snaga elemenata koji primaju energiju u svakom trenutku.*

Ovu osobinu imaju zatvoreni sistemi, kojima pripadaju električna kola.

Chapter 2

Osnovi teorije sistema

Na osnovu koncepta teorije sistema moguće je izvesti jedinstvenu metodologiju za rješavanje odziva različitih fizičkih sistema. Koncept teorije sistema zasnovan je na apstrakciji procesa u sistemu, u kojima se ostvaruje interakcija izmedju dva ili više signala. Analiza sistema se bazira na analizi interakcije izmedju signala, koju determinišu karakteristike sistema. Pri tome su karakteristike elemenata sistema i način njihovog povezivanja od sporednog interesa. U ovom poglavlju opisani su matematički modeli signala i sistema, njihove karakteristike i klasifikacija. Posebno su obradjeni linearni, vremenski nepromjenljivi (LVN) sistemi.

2.1 Klasifikacija i osobine signala

Signali su modeli promjenjivih veličina, koji u obliku funkcija ili niza vrijednosti, predstavljaju informaciju o datoj veličini. Signali obično sadrže informacije o ponašanju ili prirodi veličine koju predstavljaju. Promjenljiva veličina se naziva amplituda signala i zavisna je varijabla. Amplituda zavisi od jedne ili više nezavisnih varijabli. U fizičkim sistemima najčešće korištene nezavisne varijable su: vrijeme t, prostorne koordinate x, y, z i temperatura T.

Zavisno o karakteru varijabli, signali se grupišu u sljedeće klase:

jednodimenzionalni	višedimenzionalni
kontinualni	diskretni
analogni	digitalni
signali realne amplitude	signali kompleksne amplitude
deterministički	stohastički

U cilju konzistentnog izvodjenja metodologije teorije sistema, potrebno je definisati pravila za označavanje signala. U ovoj knjizi, kontinualni i analogni signali označavaju se malim slovima sa naznakom nezavisnih varijabli unutar male zagrade: $x(t), g(x, y)$. Kod diskretnih i digitalnih signala, nezavisna varijabla se navodi unutar srednje zagrade: $x[T]$ ili $x[nT]$.

Signali koji imaju jednu nezavisnu promjenljivu nazivaju se jednodimenzionalni signala. Višedimenzionalni signali imaju dvije ili više nezavisnih promjenljivih. Ako signal $x(t)$ ima kontinualnu nezavisnu varijablu (vrijeme t) on se klasifikuje kao (vremenski) kontinualni signal. Ukoliko amplituda kontinualnog signala može poprimiti bilo koju vrijednost, signal se klasifikuje kao analogni. Signal prikazan na slici 2.1 pripada klasi jednodimenzionalnih, analognih signala vremenske promjenljive t.

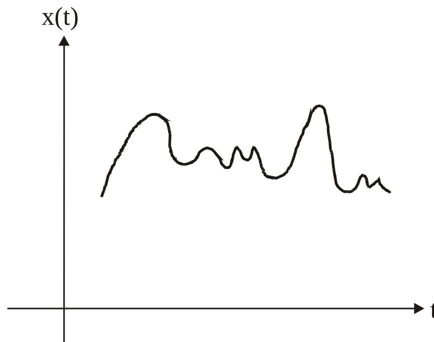


Figure 2.1: Dijagram analognog signala

Pošto analogni signali imaju odredjene vrijednosti amplitude za cijeli interval promjene nezavisne varijable, oni predstavljaju kontinualne modele promjenjive veličine.

Signali kod kojih je nezavisna varijabla diskretna veličina nazivaju se diskretni signali. Pošto je definisan samo za diskretne vrijednosti nezavisne varijable, diskretni signal se opisuje sekvencom vrijednosti amplitude. Diskretni signal $x[T]$ može predstavljati realnu veličinu čija je nezavisna varijabla prirodno diskretna veličina. Za poznati kontinualni signal $x(t)$, moguće je definisati odgovarajući diskretni signal $x[nT]$, tako da se vrijednosti signala $x(t)$ zapisuju samo u diskretnim vremenskim intervalima nT, za $n=0,1,2,\cdots$. Tada se, u izabranim vremenskim intervalima nT, kontinualni signal $x(t)$ može predstaviti pomoću diskretnog signala $x[nT]$. Diskretni signal $x[nT]$ ne daje informacije o vrijednostima kontinualnog signala $x(t)$ izmedju diskretnih vrijednosti nT. Ovaj postupak aproksimativnog predstavljanja kontinualnih signala pomoću diskretnih signala naziva se diskretizacija. Jasno je da što je manja vrijednost perioda diskretizacije T, diskretni signal $x[nT]$ bolje aproksimira kontinualni signal $x(t)$, odnosno vrijedi:

$$\lim_{T\to 0} x[nT] = x(t) \tag{2.1}$$

Diskretni signal $x[nT]$, koji može poprimiti samo ograničeni broj različitih vrijednosti, odnosno čija je amplituda takodje diskretna veličina, naziva se digitalni signal. Dakle, digitalni signal je definisan za odredjene diskretne vrijednosti nezavisne varijable i ima diskretne vrijednosti amplitude signala. Digitalni signali se

koriste u fizičkim sistemima koji sadrže digitalne procesore. Posebnu klasu digitalnih signala čine binarni signali, čije amplitude mogu da poprime samo jednu od vrijednosti 0 i 1. Digitalni signal se obično sastoji od impulsa, koji se u redovnim intervalima ponavljaju. Na slici 2.2 prikazan je jednodimenzioni digitalni signal, čija je nezavisna varijabla diskretno vrijeme nT.

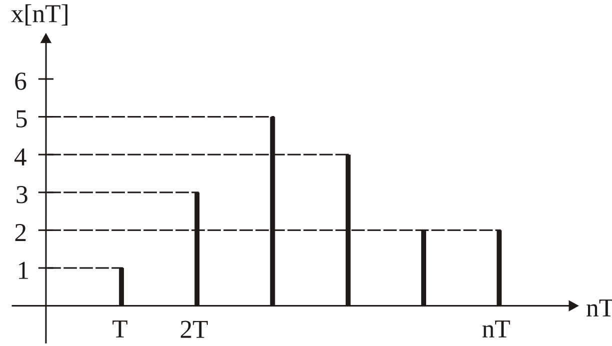


Figure 2.2: Dijagram digitalnog signala

Ukoliko signal $x(t)$ ima realnu vrijednost amplitude, klasifikuje se kao realni signal. Ukoliko je amplituda signala kompleksna vrijednost $\underline{x}(t)$, signal se naziva kompleksni. Signali koji imaju vrijednost amplitude potpuno odredjenu za sve vrijednosti nezavisne varijable, nazivaju se deterministički signali. Ovi signali se mogu predstaviti pomoću poznatih matematičkih funkcija nezavisne promjenljive. Signali koji poprimaju slučajne vrijednosti za svaku vrijednost nezavisne promjenljive, opisuju se stohastičkim matematičkim modelima i nazivaju se stohastički signali.

Prema osobinama funkcije kojom se predstavljaju, signali se dijele na parne i neparne. Za parne kontinualne signale vrijedi:

$$x_p(-t) = x_p(t)$$

a za neparne:

$$x_n(-t) = -x_n(t)$$

Proizvoljni kontinualni signal $x(t)$ može se predstaviti kao suma parnog i neparnog signala:

$$x(t) = x_p(t) + x_n(t) \tag{2.2}$$

pri čemu vrijedi:

$$x_n = \frac{1}{2}\{x(t) - x(-t)\} \tag{2.3}$$

$$x_p(t) = \frac{1}{2}\{x(t) + x(-t)\} \tag{2.4}$$

Proizvod dva parna signala je paran signal, a proizvod parnog i neparnog signala je neparni signal.

Vremenski kontinualni signal $x(t)$ klasifikuje se kao periodičan signal sa periodom ponavljanja $T>0$ ukoliko vrijedi:

$$x(t+T) = x(t), \text{ za svako } t \in \mathbf{R} \tag{2.5}$$

Tada takodje vrijedi:

$$x(t \pm kT) = x(t), \text{ za } k \in \mathbf{N} \tag{2.6}$$

Najmanja vrijednost perioda T za koji vrijede prethodne relacije naziva se osnovni period. Signal koji nije periodičan pripada klasi neperiodičnih signala.

Za proizvoljni vremenski kontinualni signal $x(t)$ definiše se normalizovani energetski sadržaj E relacijom:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \tag{2.7}$$

Normalizovana srednja vrijednost snage P za signal $x(t)$ definiše se prema relaciji:

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt \tag{2.8}$$

Prema karakteristikama normalizovanog energetskog sadržaja E i normalizovane snage P definišu se sljedeće klase signala:

- za $0<E<\infty$ i $P=0$, signal $x(t)$ predstavlja energetski signal.
- za $0<P<\infty$ i $E=\infty$, signal $x(t)$ predstavlja signal snage.
- ukoliko $x(t)$ ne zadovoljava niti jedan od prethodnih uslova signal nije ni energetski signal niti signal snage.

Periodični signal predstavlja signal snage ukoliko je njegov energetski sadržaj unutar perioda T ograničen.

U ovoj knjizi obradjena je metodologija analize LVN električnih kola (sistema) pri djelovanju vremenskih kontinualnih signala. Pri tome se obradju signali koji se mogu analitički definisati, odnosno deterministički signali. Koncept analize LVN kola pri djelovanju kontinualnih signala predstavlja osnovu za izvodjenje metoda analize kola pri djelovanju diskretnih signala. Metode i tehnike analize LVN kola, koje se obradjuju u ovoj knjizi, primjenjive su i za analizu signala u realnim sistemima u različitim inženjerskim disciplinama kao i u prirodnim i društvenim naukama (npr. u biologiji, medicini, sociologiji i ekonomiji).

2.2 Osnovni pojmovi i osobine sistema

Pri proučavanju inženjerskih problema, pored proučavanja oblika signala analiziraju se procesi prenosa, obrade i skladištenja (memorisanja) signala. Prema tome, predmet interesovanja inženjera predstavlja proces interakcije izmedju signala, koji se ostvaruje unutar sistema. Sistem se definiše kao apstrakcija procesa ili objekta u kome se ostvaruje interakcija izmedju dva ili više signala. U teoriji sistema razvija se opšti, konceptualni model procesa interakcije signala unutar sistema, na kome se zasniva jedinstvena metodologija za analizu različitih fizičkih sistema. Metodologija teorije sistema primjenjuje se u elektrotehnici za analizu sistemima za konverziju i prenos energije i sistemima za obradu i prenos signala.

Najjednostavniji opis sistema, poznat je kao model "crna kutija". U ovom modelu sistem interakciju sa okruženjem ostvaruje preko signala, kao što je prikazano na slici 2.3.

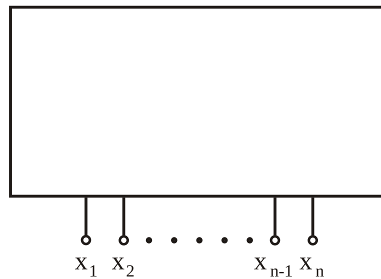


Figure 2.3: Model sistema "crna kutija"

Signali preko kojih sistem ima vezu sa okruženjem, nazivaju se vanjski signali i dijele se na ulazne i izlazne. Ulazni signali predstavljaju uticaj okruženja na sistem i ne zavise od procesa unutar sistema. Sistem samo reaguje na njihovo djelovanje i nema direktan uticaj na njihov oblik. Zato se ovi signali obično nazivaju pobudni ili nezavisni signali. Informacija o odzivu (reakciji) sistema na ulazni (pobudni) signal, predstavlja se pomoću izlaznih signala.

Signali i sistemi često se koriste bez posebnog znanja o fizičkim karakteristikama veličina koje predstavljaju, što je analogno korištenju matematičkih metoda kada se varijable x i y u jednačinama upotrebljavaju bez navodjenja njihovog fizičkog značenja. U cilju konzistentne primjene metodologije teorije sistema ulazni signali se označavaju simbolom x, a izlazni signali simbolom y, kao što je za prosti model sistema sa jednim ulazom i jednim izlazom, prikazano na slici 2.4.

Proces transformacije ulaznog signala x, u sistemu $\mathcal{S}$, u izlazni signal y, simbolički se označava operacijom:

$$x \to y$$

Ukoliko se odziv sistema (izlaz y) može eksplicitno izraziti preko pobude sistema (ulaza x) proces transformacije signala u sistemu $\mathcal{S}$ simbolički se izražava funkcijom:

$$\mathcal{S}\{x\} = y \tag{2.9}$$

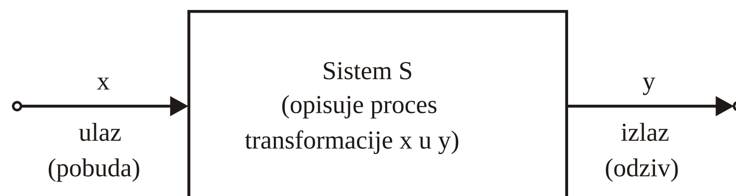
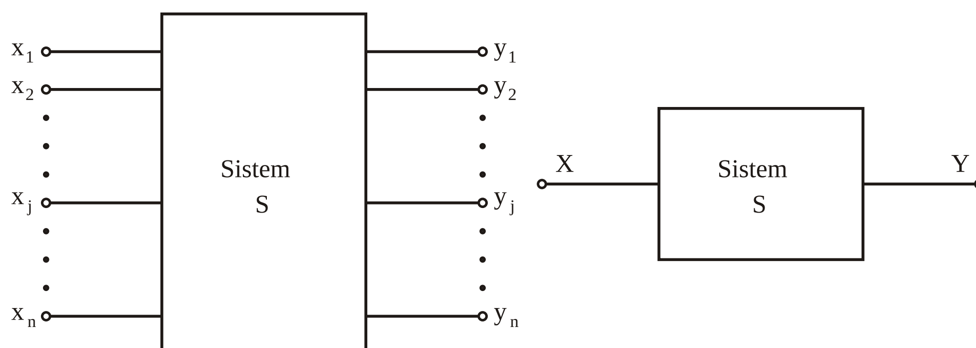


Figure 2.4: Prosti model sistema sa jednim ulazom i jednim izlazom

Funkcija $\mathcal{S}\{x\}$ naziva se prenosna karakteristika sistema.

Složeniji sistemi ostvaruju interakciju sa okruženjem preko više ulaznih i izlaznih signala. U opštem slučaju svaki izlazni signal zavisi od svakog ulaznog signala. Procesi unutar sistema, odnosno karakteristike sistema, odredjuju intenzitet medjusobne interakcije pojedinih ulaznih x_i i izlaznih signala y_j. Radi jednostavnosti označavanja često se u predstavljanju sistema sa više ulaza/izlaza koriste vektori ulaznih signala $\mathbf{x}$ i izlaznih signala $\mathbf{y}$, kao što je prikazano na slici 2.5.



$$\mathcal{S}\{x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n\} = \{y_1, y_2, \ldots, y_j, \ldots, y_m\}$$
$$\mathcal{S}\{\mathbf{x}\} = \mathbf{y}$$

Figure 2.5: Model složenog sistema sa više ulaza i izlaza

Opšta teorija sistema omogućava primjenu jedinstvene metodologije i koncepta pri analizi različitih fizičkih problema. Zbog toga je u ovoj knjizi oblast teorije električnih kola obradjena sa ciljem definisanja principa i metoda koji se pored rješavanja električnih kola mogu koristi u opštoj teoriji sistema. Korištenje visokog nivoa apstrakcije u izvodjenju metoda rješavanja električnih kola omogućava, pored primjene definisanih metoda u specijalističkim oblastima elektrotehnike, njihovo korištenje i pri rješavanju analognih realnih fizičkih sistema.

Kao i kod signala, korištenjem odabranih kriterija, vrši se klasifikacija sistema. U tabeli 2.1 dat je prikaz najčešće korištenih klasa sistema.

Tabela 2.1. Klasifikacija sistema

kontinualni	diskretni
analogni	digitalni
deterministički	stohastički
linearni (L)	nelinearni (N)
vremenski nepromjenljivi (VN)	vremenski promjenjivi (VP)
dinamički	statički

Karakteristike sistema odredjuju proces interakcije signala i karakter operacija nad signalima. Sa aspekta primjenljivosti pojedinih metoda opšte teorije sistema najvažnije osobine sistema su linearnost i vremenska promjenljivost. U nastavku ovog poglavlja posebno su opisane ove osobine.

2.3 Linearni vremenski nepromjenljivi sistemi

Analiza linearnih vremenski nepromjenljivih (invarijantnih) sistema (LVN sistema), zasnovana je na korištenju linearne algebre i predstavlja osnovu opšte teorije sistema. Analize LVN sistema koristi se u sljedećim oblastima elektrotehnike:

- analiza i sinteza (projektovanje) LVN električnih kola
- prenos signala
- obrada digitalnih signala
- upravljanje sistemima
- mjerenje fizičkih veličina

2.3.1 Linearnost sistema

Sistemi za koje vrijedi princip superpozicije signala, pripadaju klasi linearnih sistema. Dakle, linearni sistemi posjeduju matematičke osobine homogenosti i aditivnosti signala. Za sistem $\mathcal{S}\{x\} = y$ osobina homogenosti znači da odziv sistema na signal kx ima vrijednost ky, odnosno da vrijedi:

$$\mathcal{S}\{kx\} = ky \tag{2.10}$$

što je simbolično prikazano na slici 2.6. relacija 2.10 ukazuje da promjena odziva sistema y direktno proporcionalno slijedi promjenu pobude x.

Za sistem $\mathcal{S}$ i signale x_1 i x_2 za koje vrijedi $\mathcal{S}\{x_1\} = y_1$ i $\mathcal{S}\{x_2\} = y_2$, osobina aditivnosti znači da pobuda $x_1 + x_2$ izaziva odziv sistema:

$$y = \mathcal{S}\{x_1 + x_2\} = \mathcal{S}\{x_1\} + \mathcal{S}\{x_2\} = y_1 + y_2 \tag{2.11}$$

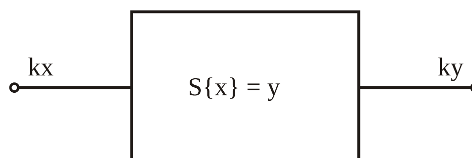
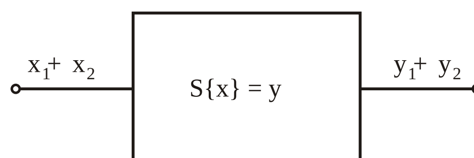


Figure 2.6: Ilustracija osobine homogenosti linearnih sistema

kao što je prikazano na slici 2.7. Osobina aditivnosti ukazuje da se u linearnom sistemu ulazni signali x_1 i x_2 transformišu kao signal sume x_1+x_2 bez medjusobne interakcije pri tranformaciji.



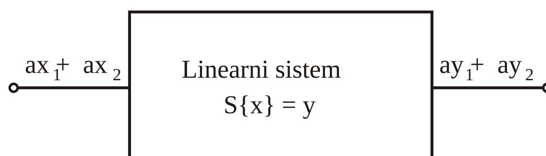
za: $S\{x_1\} = y_1$ i $S\{x_2\} = y_2$ vrijedi: $S\{x_1 + x_2\} = y_1 + y_2$

Figure 2.7: Ilustracija osobine aditivnosti linearnih sistema

Princip superpozicije za linearne sisteme znači da linearna kombinacija $ax_1 + bx_2$ signala x_1 i x_2 izaziva odziv $y = ay_1 + by_2$, koji predstavlja identičnu kombinaciju odziva y_1 i y_2. Osobina superpozicije simbolički se opisuje relacijom:

$$S\{ax_1 + bx_2\} = ay_1 + by_2 \tag{2.12}$$

U opštem slučaju koeficijenti a i b su kompleksni brojevi. Princip superpozicije ilustrovan je na slici 2.8.



za: $S\{x_1\} = y_1$ i $S\{x_2\} = y_2$ vrijedi: $S\{ax_1 + bx_2\} = ay_1 + by_2$

Figure 2.8: Ilustracija osobine superpozicija signala u linearnim sistemima

Specijalni slučaj primjene principa superpozicije javlja se za nulte vrijednosti

koeficijenata, kada vrijedi:

$$S\{0x_1 + 0x_2\} = 0\,y_1 + 0\,y_2 = 0$$

To znači da je za nultu vrijednost ulaznog signala $x(t)=0$, za $t \in \mathbf{R}$ odziv linearnog sistema ima vrijednost $y=0$.

Princip superpozicije vrijedi i za sisteme sa više ulaza i izlaza. Na slici 2.9 prikazan je princip superpozicije za sistem sa n–ulaza, izveden za j–ti izlaz.

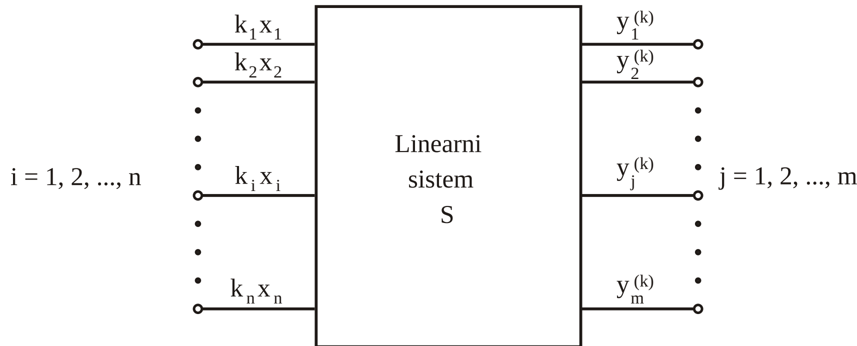


Figure 2.9: Princip superpozicije za linearni sistem sa više ulaza i izlaza

Za sistem sa slike 2.9 vrijedi:

$$\begin{aligned} S\{x_1, x_2, \cdots, x_j, \cdots, x_n\} &= \{y_1, y_2, \cdots, y_j, \cdots, y_m\} \\ S\{x_1, 0, \cdots, 0\} &= \{y_{11}, y_{21}, \cdots, y_{j1}, \cdots, y_{m1}\} \\ S\{0, 0, \cdots, x_i, 0, \cdots\} &= (y_{1i}, y_{2i}, \cdots, y_{ji}, \cdots, y_{mi}\} \end{aligned}$$

odakle slijedi:

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} y_{ji}, \text{ za } j = 1, 2, \ldots, m \tag{2.13}$$

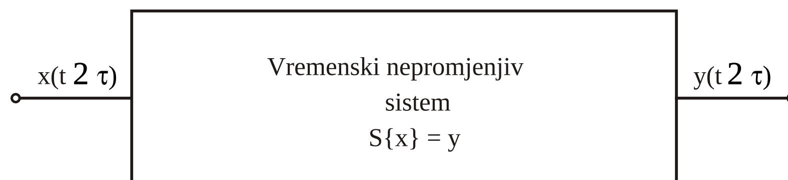
Signal y_{ji} predstavlja odziv na izlazu j na pobudni signal na i–tom ulazu (x_i). Na osnovu osobine superpozicije pobudni signali $k_i x_i$, (za $i = 1, 2, \ldots, n$) izazivaju odziv na j–tom izlazu:

$$y_j^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} k_i\, y_{ji}, j = 1, 2, \ldots, m \tag{2.14}$$

2.3.2 Vremenska nepromjenljivost sistema

Osobina vremenske nepromjenljivosti sistema simbolički je prikazana na slici 2.10.

Za vremenski nepromjenljiv sistem $\mathcal{S}\{x(t)\} = y(t)$, odziv $y(t-\tau)$ na vremenski pomjeren ulazni signal $x(t-\tau)$, za $\tau \in \mathbf{R}$ ima identičan oblik kao i signal $y(t)$, koji je vremenski pomjeren za istu konstantu τ. Ova osobina vrijedi za sisteme



Za $S\{x(t)\} = y(t)$ vrijedi $S\{x(t-\tau)\} = y(t-\tau)$

Figure 2.10: Ilustracija osobine vremenske nepromjenljivosti sistema

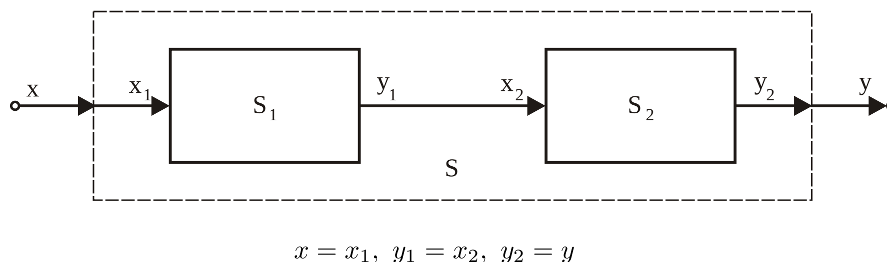
čije komponenti imaju vremenski nepromjenjive karakteristike. To znači da su i parametri sistema nepromjenljivi u odnosu na nezavisnu vremensku varijablu t.

Obično se pretpostavlja da su linearni sistemi istovremeno i vremenski nepromjenljivi sistemi, premda osobina vremenske nepromjenljivosti nije potreban uslov da se signal klasifikuje kao linearan. Sistemi koji posjeduju osobinu linearnosti i vremenske nepromjenljivosti imaju poseban značaj u teoriji sistema. Električna kola, koja su sačinjena od linearnih vremenski nepromjenjivih elemenata, pripadaju ovoj klasi linearnih vremenski nepromjenljivih (LVN) sistema. U nastavku ovog poglavlja za LVN sisteme često se koristi naziv linearni sistemi.

2.3.3 Operacije nad signalima u linearnim sistemima

U ovom poglavlju opisuju se dozvoljene operacije nad signalima, koje se mogu koristi prilikom formiranja modela složenih linearnih sistema, povezivanjem njegovih linearnih komponenti.

Kaskadna veza sistema $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$ predstavlja vezu u kojoj je ulaz u drugi sistem S_2 identičan izlazu iz prvog sistema S_1, odnosno vezu za koju vrijedi $x_2 = y_1$. Pri tome je ulaz u prvi sistem x_1 ujedno je ulaz u kaskadnu vezu x, a izlaz iz drugog sistema y_2 predstavlja izlaz iz kaskadne veze y. Kaskadna veza dva sistema prikazana je na slici 2.11.



$x = x_1,\ y_1 = x_2,\ y_2 = y$

Figure 2.11: Kaskadna veza dva sistema

Kaskadna veza dva sistema opisuje se relacijom:

$$y = y_2 = \mathcal{S}_2\{x_2\} = \mathcal{S}_2\{y_1\} = \mathcal{S}_2\{\mathcal{S}_1\{x_1\}\} = \mathcal{S}_2\{S_1\{x\}\} = \mathcal{S}\{x\} \qquad (2.15)$$

Ako su sistemi S_1 i S_2 linearni, tada promjena položaja sistema unutar kaskadne veze ne mijenja karakteristiku kaskade S, odnosno vrijedi:

$$y = y_1 = \mathcal{S}_1\{x_1\} = \mathcal{S}_1\{y_2\} = \mathcal{S}_1\{\mathcal{S}_2\{x_2\}\} = \mathcal{S}_1\{\mathcal{S}_2\{x\}\} = \mathcal{S}\{x\} \qquad (2.16)$$

kao što je prikazano na slici 2.12. Ova osobina linearnih sistema naziva se komutacija.

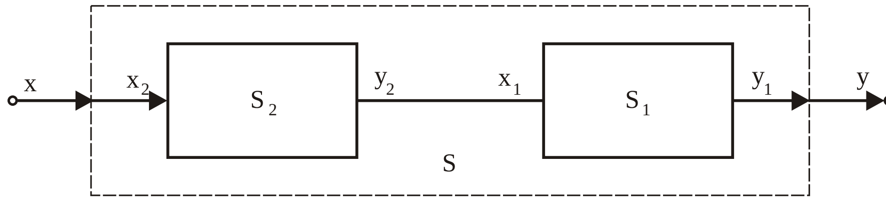


Figure 2.12: Ilustracija osobine komutacija linearnih sistema

Komutacija kaskadne veze sistema S_1 i S_2 simbolički se izražava sljedećom relacijom:

$$y = \mathcal{S}\{x\} = \mathcal{S}_2\{\mathcal{S}_1\{x\}\} = \mathcal{S}_1\{\mathcal{S}_2\{x\}\} \qquad (2.17)$$

Paralelna veza dva sistema opisana je relacijama:

$$\begin{aligned} x &= x_1 = x_2 \\ y &= y_1 + y_2 \end{aligned}$$

Dakle, u paralelnoj vezi sistema S_1 i S_2 ulazi u sisteme su jednaki ulazu u vezu x, a izlaz iz veze y jednak je zbiru izlaza y_1 i y_2 povezanih sistema. Paralelna veza sistema prikazan je na slici 12.13.

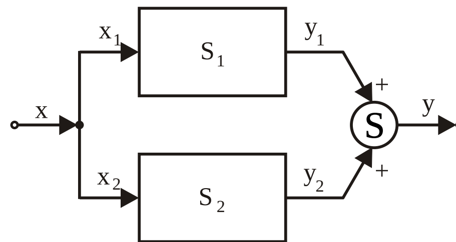


Figure 2.13: Ilustracija paralelne veze dva sistema

Paralelna veza se simbolički opisuje relacijom:

$$\mathcal{S}\{x\} = y = y_1 + y_2 = \mathcal{S}_1\{x_1\} + \mathcal{S}_2\{x_2\} = \mathcal{S}_1\{x\} + \mathcal{S}_2\{x\} \qquad (2.18)$$

Na slici 2.14 prikazan je sistem sa više ulaza i više izlaza. Ovakav složeni sistem ima osobinu linearnosti ako su svi podsistemi koje sadrži linearni i ako se u sistemu obavljaju samo operacija sabiranja signala.

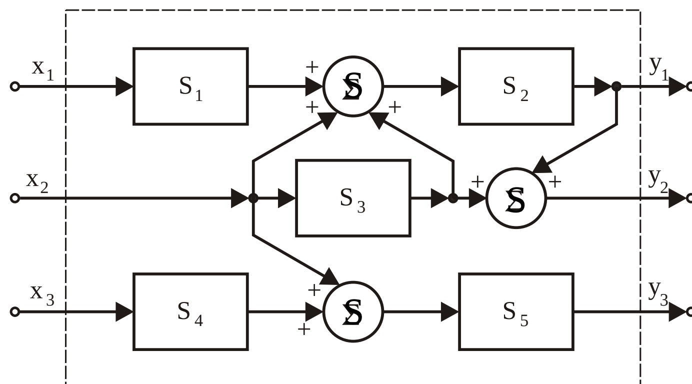
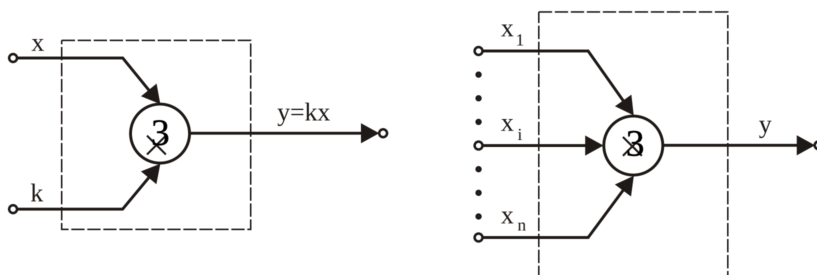


Figure 2.14: Složeni linearni sistem ($S_1, \ldots, S_5$ - linearni podsistemi)

Prema tome, ako su podsistemi $S_1, \ldots, S_5$ linearni tada operacija sabiranja signala ne mijenja osobinu linearnosti. To znači da za operacije signala, koje su prikazanu na slici 2.14 vrijedi princip superpozicije.

Kod operacije množenja signala razlikuju se:

- množenje sa konstantom, prikazano na slici 2.15.a
- množenje dva ili više signala, prikazano na slici 2.15.b.



a. linearno mnozenje: $y = kx$ b. nelinearno množenje: $y = \prod_{i=1}^{n} x_i$

Figure 2.15: Množenje signala

Množenje sa konstantom ne mijenja osobinu linearnosti sistema i zato se naziva linearno množenje, dok medjusobno množenje dva ili više signala mijenja osobinu linearnosti sistema i zato se naziva nelinearno množenje. Linearna električna kola se formiraju medjusobnim povezivanjem linearnih elemenata, što odgovara linearnim operacijama nad signalima kola (naponima i strujama), koje su obradjene u ovom poglavlju.

2.4 Statički i dinamički elementi

Elementi kod kojih izlaz $y(t_0)$ zavisi samo od trenutne vrijednosti ulaza $x(t_0)$ pripadaju klasi statičkih elementata. Kod ove klase elementa vrijednost ulaza $x(t)$, za $-\infty < t < t_0$ ne utiče na vrijednost izlaza $y(t_0)$. Zbog toga se kaže da statički elementi nemaju sposobnost memorisanja.

Otpornik je primjer statičkog elementa, pošto je njegova prenosna karakteristika opisana algebarskom jednačinom $F(v, i, t) = 0$. Prenosna karakteristika statičkih elemenata naziva se statička karakteristika i obično se grafički predstavlja u xy koordinatnom sistemu. Linearni otpornik je primjer linearnog statičkog elementa. Statička karakteristika linearnog otpornika, opisana u vi koordinatnom prostoru relacijom:

$$v(t) = R(t)i(t)$$

za odredjeni trenutak vremena t predstavlja pravac koji prolazi kroz koordinatni početak. Na slici 2.16. prikazane su vi karakteristike linearnog i nelinearnog otpornika.

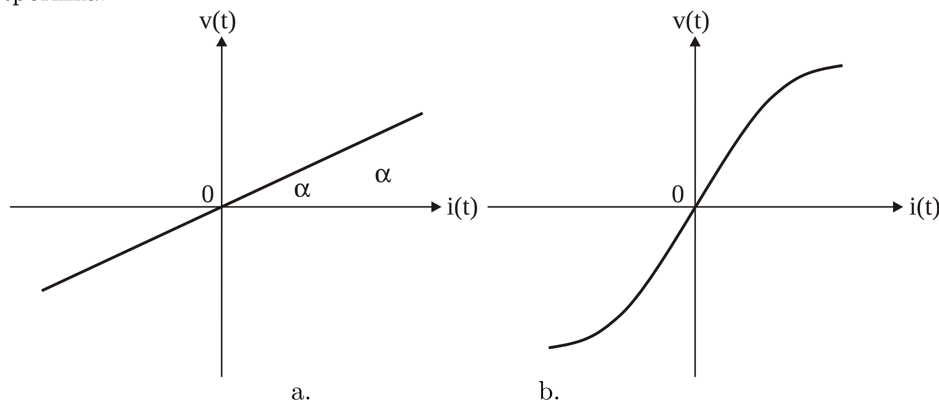


Figure 2.16: Karakterisike a. linearnog i b. nelinearnog otpornika

U opštem slučaju, linerani element čija prenosna karakteristika ima formu:

$$y(t) = Kx(t) \tag{2.19}$$

naziva se proporcionalni element. Parametar K se naziva pojačanje i ima dimenzije $y(t)/x(t)$. Sistemi koji sadrže samo statičke elemente pripadaju klasi statičkih sistema. Odziv statičkih sistema na sve vrste pobudnih signala odredjen je njihovim statičkim karakteristikama.

Elementi kod koji izlaz $y(t_0)$ zavisi od vrijednosti ulaza $x(t)$ za $t \in (-\infty, t_0)$ pripadaju klasi dinamičkih elemenata. Pošto vrijednost $x(t)$ za $t < t_0$ utiče na vrijednost izlaza $y(t_0)$ kažemo da dinamički element ima sposobnost memorisanja. Primjer dinamičkog elementa je integrator, čija je prenosna karakteristika defin-

isana relacijom:

$$y(t) = K \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \qquad (2.20)$$

Pošto integral 2.20 predstavlja površinu ispod krive $x(t)$ za $t \in (-\infty, t_0]$, jasno je da vrijednost $y(t_0)$ zavisi od vrijednosti $x(t)$, za $t \in (-\infty, t_0]$. Do ovog zaključka možemo doći i diferenciranjem jednačine 2.20 odakle izvodimo:

$$\frac{dy(t)}{dt} = Kx(t) \qquad (2.21)$$

Diferencijalna jednačina 2.21 ima rješenje, koje je jednoznačno definisano, ukoliko je poznata vrijednost $y(t_0)$, koja odredjuje konstantu u homogenom rješenju. Pošto vrijedi:

$$y(t_0) = K \int_{-\infty}^{t_0} x(\tau)d\tau \qquad (2.22)$$

$y(t_0)$ izražava uticaj "historije" promjene ulaza $x(t)$ do trenutka t_0. U analizi dinamičkih sistema često se zahtijeva odredjivanje odziva $y(t)$ za $t \geq t_0$ pri čemu je poznata vrijednost $y(t_0)$. Pri tome se obično usvaja $t_0 = 0$. Vrijednost $y(0) = y_0$ se naziva početna vrijednost. Izlaz iz integratora $y(t)$ jednoznačno je definisan za $t \geq 0$ ukoliko su poznati početna vrijednost y_0 i oblik ulaznog signala $x(t)$ za $t \geq 0$.

Sistemi koji sadrže barem jedan dinamički element pripadaju klasi dinamičkih sistema. Prenosna karakteristika dinamičkih sistema opisuje se diferencijalnom jednačinom $F(x, y, t) = 0$, u kojoj je varjabla stanja izlaz $y(t)$. Ukoliko sistem sadrži samo linearne elemente, diferencijalna jednačina je linearna. Ako su svi elementi i vremenski nepromjenljivi, diferencijalna jednačina ima konstantne koeficijente. Dakle, prenosna karakteristika LVN dinamičkog sistema opisana je linearnom diferencijalnom jednačinom sa konstantnim koeficijentima.

Za dinamičke sisteme definiše se pojam stabilnosti. Kod stabilnih sistema izlaz $y(t)$ je pod kontrolom ulaza $x(t)$ za svaki trenutak vremena t. Postoji više formalnih (matematičkih) definicija stabilnosti. Definicija koja se koristi u ovoj knjizi zasnovana je na pojmu ograničeniog signala. Ograničeni signal ima amplitudu čija vrijednost ne prelazi zadanu konačnu konstantu M, što se izražava uslovom:

$$|x(t)| \leq M, \text{ za } -\infty < t < +\infty$$

Kriterij stabilnosti sistema glasi: *kod stabilnih sistema za svaki ograničeni ulazni (pobudni) signal izlazni signal (odziv) je takodje ograničen.* Ova definicija stabilnosti poznata je kao BIBO (engl. Bounded Input Bounded Output) kriterij. Uslovno stabilni sistemi imaju ograničeni odziv na neke (ali ne sve) ograničene pobude. Kod nestabilnih sistema svaki ograničeni nenulti signal proizvodi neograničeni odziv. U ovoj knjizi obradjena je analiza stabilnosti LVN sistema, zasnovana na odredjivanju karakteristika diferencijalne jednačine, koja opisuju sistem.

2.4.1 Tranzijentni i stacionarni odziv

Proučavanje odziva dinamičkog sistema, koji je opisan diferencijalnom jednačinom $F(x, y, t) = 0$, za $t \geq 0$, pri čemu je poznata početna vrijednost y_0, naziva se analiza

odziva sistema sa poznatim početnim vrijednostima. Odziv prostog sistem prvog reda, u opštem slučaju, opisan je diferencijalnom jednačinom:

$$\frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 x(t) \tag{2.23}$$

Za vrijednost pobudnog signala $x(t) = X_0$, za $t \geq 0$ i za početnu vrijednost $y_0 = 0$, odziv sistema prvog reda ima oblik:

$$y(t) = b_0 X_0 \, a_0^{-1}(1 - e^{-a_0 t}) = Y_0(1 - e^{-a_0 t}), \quad t \geq 0 \tag{2.24}$$

Dijagrami ulaznog $x(t)$ i izlaznog $y(t)$ signala prikazani su na slici 2.17.

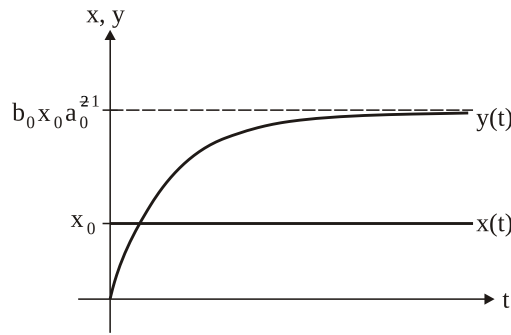


Figure 2.17: Pobuda i odziv sistema prvog reda za $x(t) = X_0$

Odziv sistema $y(t)$ možemo predstaviti kao zbir dvije komponente: Y_0 i $-Y_0 e^{-a_0 t}$, čiji dijagrami su prikazani na slici 2.18.

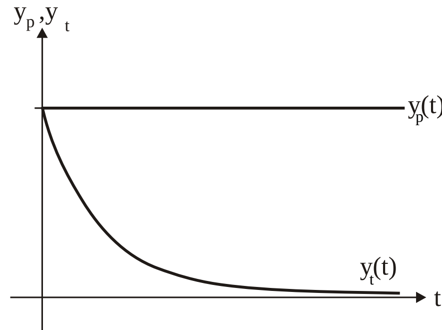


Figure 2.18: Stacionarni i tranzijentni odziv sistema prvog reda

Komponenta odziva $-Y_0 e^{-a_0 t}$, koja isčezava za $(t \to +\infty)$ naziva se tranzijentni odziv i označava se $y_t(t)$. Komponenta koja ima isti oblik za svako t naziva se stacionarni odziv i označava se $y_p(t)$. Dakle, za analizirani sistem za $(t \to +\infty)$

"kompletan" odziv sistema $y(t)$ poprima oblik stacionarnog odziva, odnosno vrijedi:

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = y_p(t) \tag{2.25}$$

Odziv stabilnih LVN sistema može se prikazati kao zbir tranzijentnog i stacionarnog odziva za sve oblike pobudnog signala. Stacionarni odziv ovih sistema identičan je partikularnom rješenju diferencijalne jednačine, koja opisuje sistem. Stacionarni odziv stabilnih sistema za $x(t) = X_0$ je konstantan signal $y(t)=Y_0$, a za $x(t)=X_m\cos(\omega t+\theta)$ odziv je sinusni signal iste frekvencije $y(t)=Y_m\cos(\omega t+\phi)$. Razdvajanje "kompletnog" odziva sistema na tranzijentnu i stacionarnu komponentu omogućava jednostavniju analizu uticaja parametara sistema na ove dvije komponente odziva. Za stacionarni odziv definiše se pojam statičke linearnosti. LVN sistemi imaju osobinu statičke linearnosti.

Chapter 3

Statički elementi kola sa jednim pristupom

U poglavlju 1 definisan je pojam ulazne snage elementa sa jednim pristupom $p(t) = v(t)i(t)$ i energije koja se predaje elementu. Otpornik je element kola sa jednim pristupom kojim se modeluju fizički procese u kojima se predana energija trenutno transformiše u neki drugi oblik energije, pri čemu je jedna od ove dvije energije električna. Uobičajeno, otpornik se koristi za modelovanje transformacije električne u toplotnu energiju, kada se energija otpornika naziva energija disipacije. Otpornik nema mogućnost akumuliranja elektrostatičke ili elektromagnetne energije. Pošto se proces transformacije energije odvija trenutno, otpornici pripadaju klasi statičkih elemenata. Generator je element kola sa jednim pristupom kojim se modeluje proces konverzije nekog drugog oblika energije u električnu energiju. Za generator se definiše pojam izlazne snage $p_i(t) = v_g(t)i_g(t)$. Idealnim modelima generatora predstavljaju se trenutni procesi konverzije energije. Zato idealni generatori takodje pripadaju klasi statičkih elemenata. U ovom poglavlju obradjeni su karakteristike i klasifikacija otpornika i generatora, kao statičkih elemenata kola sa jednim pristupom.

3.1 Otpornik - statički otporni element

Otpornik je idealni statički element kola sa jednim pristupom, kod koga je vi karakteristika $F(v, i, t) = 0$ linearna ili nelinearna algebarska funcija. Za izabrani trenutak vremena t, funkcija $F(v, i, t) = 0$ može se grafički prikazati u vi koordinatnom sistemu, koji se naziva prostor stanja. Varijable stanja: napon v i struja i predstavljaju koordinate sistema i nazivaju se koordinate prostora stanja. Kvantitativna karakteristika otpornika naziva se otpor. U opštem slučaju, otpor R se u datom trenutku t definiše parcijalnim izvodom:

$$R(v, i, t) = \frac{\partial v}{\partial i} \tag{3.1}$$

Klasifikacija otpornika, kao i sistema, vrši se na osnovu osobina linearnosti i vremenske nepromjenljivosti vi karakteristike. Prema kriterijumu linearnosti otpornici se dijele na: linearne i nelinearne. Karakteristika linearnih otpornika predstavlja se pravcem u prostoru stanja, koji u svakom trenutku vremena t prolazi kroz ishodište vi koordinatnog sistema, kao što je prikazano na slici 3.1.

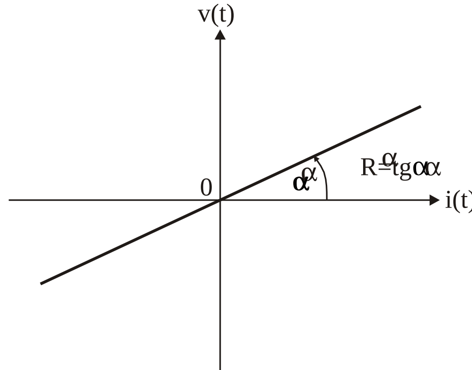


Figure 3.1: Karakteristika linearnog otpornika

Za linearne otpornike vrijedi Omov zakon, odnosno za sve vrijednosti nezavisne varijable t važi:

$$v(t) = R(t)i(t) \tag{3.2}$$

ili:

$$i(t) = G(t)v(t) \tag{3.3}$$

pri čemu je:

$$G(t) = \frac{1}{R(t)} \tag{3.4}$$

Inverzna vrijednost otpora $G(t)=1/R(t)$ naziva se provodnost otpornika. Za odabrani trenutak vremena t otpor linearnih otpornika $R(t)=R$ predstavlja nagib pravca $v=Ri$ u odnosu na i–osu.

Posebnu klasu linearnih otpornika predstavljaju linearni vremenski nepromjenljivi (LVN) otpornici. Ovi otpornici imaju konstantnu vrijednost otpora R za sve vrijednosti t, tako da njihova vi karakteristika ima oblik $v(t)=Ri(t)$. Kao i LVN sistemi i LVN otpornici posjeduju osobine homogenosti i aditivnosti. Ove osobine LVN otpornika ilustrovane su na slici 3.2.

Specijalne, granične slučajeve LVN otpornika predstavljaju:

- kratak spoj krajeva otpornika, za vrijednost $R=0$.
- prekid kola izmedju krajeva otpornika, za vrijednost $G=0$.

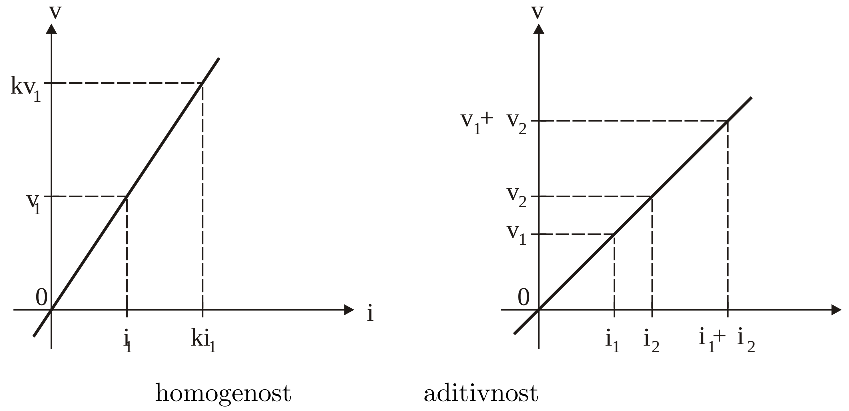
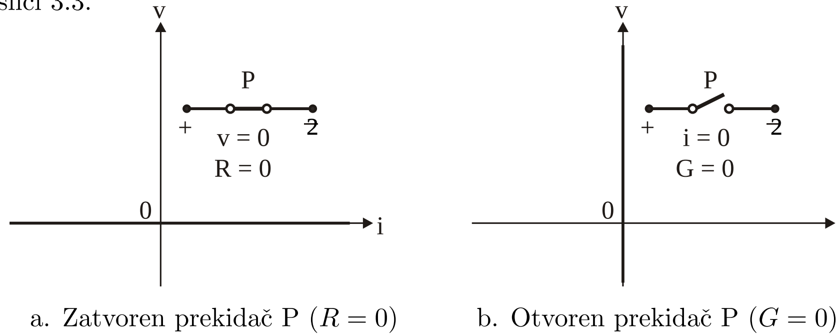


Figure 3.2: Osobine homogenosti i aditivnosti LVN otpornika

Granični slučajevi otpornika predstavljaju modele idealnog prekidača u zatvorenom položaju (za $R = 0$), odnosno u otvorenom položaju (za $G = 0$), kao što je prikazano na slici 3.3.



a. Zatvoren prekidač P ($R = 0$) b. Otvoren prekidač P ($G = 0$)

Figure 3.3: Modeli idealnog prekidača

Idealni prekidač trenutno mijenja status izmedju otvorenog i zatvorenog položaja. Idealni prekidač je element kola, koji se koristi pri modelovanju procesa trenutne promjene strukture kola.

Otpornici kod kojih *vi* karakteristika nije linearna pripadaju klasi nelinearnih otpornika. Karakteristika nelinearnih otpornika za izabrani trenutak t predstavlja se nelinearnom algebarskom funkcijom $f(v, i) = 0$, koja prolazi kroz ishodište *vi* koordinatne ravni, ili pravcem koji ne prolazi kroz ishodište. Tipičan primjer nelinearne karakteristike otpornika predstavlja *vi* karakteristika germanijum diode, prikazana na slici 3.4.

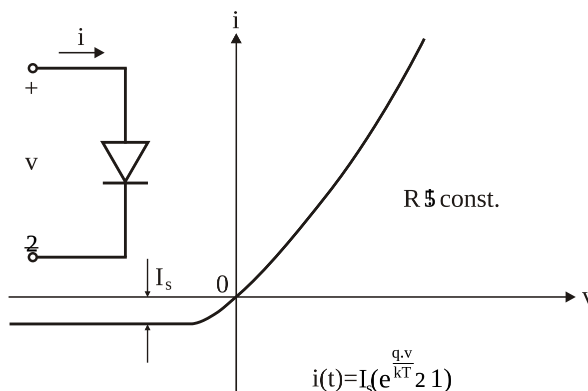


Figure 3.4: Karakteristika nelinearnog otpornika - vi karakteristika Ge diode

Karakteristika nelinearnih otpornika, za izabrani trenutak vremena t, može da ima sljedeće analitičke oblike:

v = f(i) : Eksplicitna funkcija $v=f(i)$ jednoznačno je definisana za sve vrijednosti struje i, što znači da za zadanu vrijednost struje $i(t)$ na pristupu može vladati jedan i samo jedan napon $v(t)$. Otpornici koji imaju ovakvu karakteristiku pripadaju klasi strujno kontrolisanih elemenata odnosno elementima v–tipa. Zatvoreni prekidač i otpornik čija je karakteristika prikazana na slici 3.5 pripadaju ovim elementima.

i = g(v) : Eksplicitna funkcija $i = g(v)$ jednoznačno je definisana za sve vrijednosti napona v. Ovu karakteristiku imaju naponski kontrolisani elementi ili elementi i–tipa, kao što su otvoreni prekidač i Ge–dioda.

Za element čija je karakteristika prikazana na slici 3.5, nije moguće jednoznačno definisati vi karakteristiku funkcijom $i = g(v)$, pošto pojedinim vrijednostima napona pristupa (za $v=v_1$) odgovara više vrijednosti struja pristupa ($i = i_1, i_2, i_3$).

Kod nelinearnih otpornika na pojedinim segmentima karakteristike $v = f(i)$, ili karakteristike $i=g(v)$, izvodi df/di, odnosno dg/dv mogu imati negativne vrijednosti. To znači da je nagib odgovarajuće vi karakteristike na tim segmentima negativan. Za karakteristiku $v=f(i)$ prikazanu na slici 3.5, na jednom segmentu vrijedi $df/di<0$. Kod elemenata koji imaju ove osobine javlja se fenomen lokalnog negativnog otpora $R=df/di<0$, odnosno negativne provodnosti $G=dg/dv<0$. Ukoliko je izvod df/di, odnosno dg/dv, uvijek pozitivna veličina, kaže da je vi karakteristika monotono-rastuća i tada za sve vrijednosti koordinata (v, i) vrijedi $R>0$ ili $G>0$. Ovakvi otpornici su istovremeno i strujno i naponski kontrolisani elementi. Linearni otpornik sa otporom $R>0$, čija je karakteristika prikazana na slici 3.1, pripada ovoj klasi elemenata.

Analitičko rješenje nelinearne algebarske jednačine $f(v, i) = 0$, odnosno jednačina $v-f(i)=0$ i $i-g(v)=0$, koje opisuju vi karakteristike nelinearnih otpornika, u opštem slučaju nije moguće odrediti. Zbog toga se pri praktičnom rješavanju

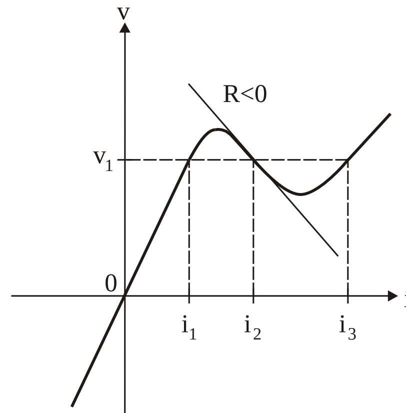


Figure 3.5: Karakteristika nelinearnog, strujno kontrolisanog otpornika

odziva kola koja sadrže nelinearne otpornike primjenjuje postupak linearizacije. Postupak linearizacije omogućava izračunavanje analitičkog odziva linearizovanog modela kola. Linearizovani model je aproksimacija nelinearne karakteristike, koja sa zadovoljavajućom tačnošću predstavlja karakteristike nelinearnih otpora u definisanim granicama promjene varijabli stanja (v, i). Linearizacija funkcije $f(v, i)$ obično se provodi po segmentima vi karakteristike. Na slici 3.6 prikazani su linearizovani model Ge-diode kao i model idealne diode.

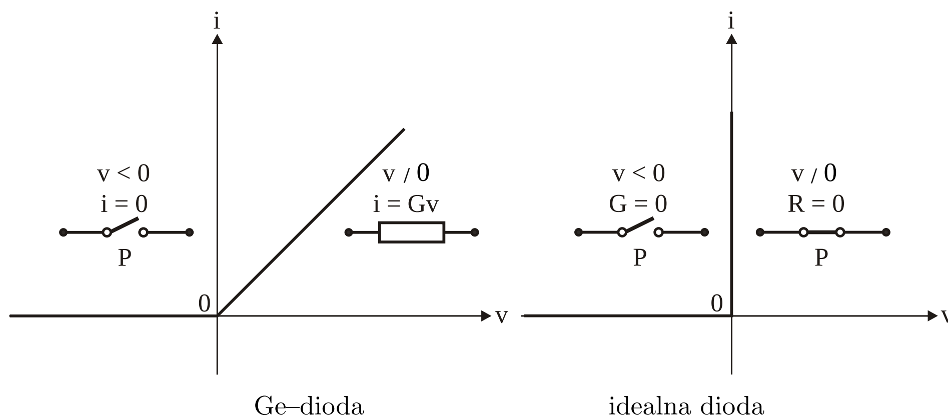


Figure 3.6: Linearizovani model Ge-diode i model idealne diode

Linearizacija karakteristika nelinearnih elemenata omogučava korištenje tehnika koje se primjenjuju pri rješavanju LVN kola. Odredjivanje odziva linearizovanih kola svodi na rješavanje sistema lineranih algebarskih jednačina.

Uporedjujuci oblike vi karakteristika linearnih i nelinearnih otpornika, uočava se da linearni otpornici imaju simetričnu vi karakteristiku u odnosu na ishodište

u *vi* koordinatnoj ravni. Ova osobina linearnih otpornika naziva se bilateralnost i ukazuje da *vi* karakteristika ovih elemenata ne zavisi od smjera napona i struje na njima. Zbog toga se kod ovih elemenata ne moraju označavati krajevi. Općenito, nelinearni otpornici i nelinearni elementi nemaju osobinu bilateralnosti te je neophodno označavanje njihovih krajeva, odnosno referentnih smjerova napona v i struje i, za koje je definisana *vi* karakteristika.

Prema karakteru zavisnosti *vi* karakteristike o vremenu t, otpornici se dijele na:

- vremenski nepromjenljive (invarijantne) otpornike (VN).
- vremenski promjenljive otpornike (VP).

Kod vremenski promjenljivih otpornika *vi* karakteristika je funkcija vremena t. Kod linearnih, vremenski promjenljivih otpornika *vi* karakteristika je opisana relacijom:

$$v(t) = R(t)i(t)$$

odnosno otpor $R(t)$ se mijenja u vremenu. Karakteristika linearnog, vremenski promjenljivog otpornika prikazanog na slici 3.7, kod koga se $R(t)$ mijenja u funkciji frekvencije rotacije f, definisana je relacijom:

$$R(t) = R_0 + R_m \cos 2\pi f t \tag{3.5}$$

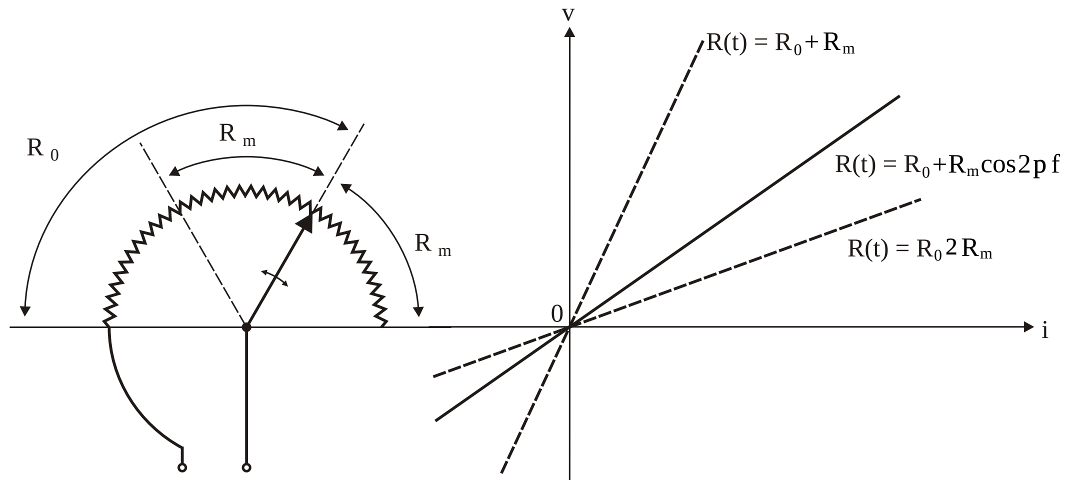


Figure 3.7: Vremenski promjenljivi otpornik $R(t) = R_0 + R_m \cos 2\pi f t$

Ukoliko je struja kroz ovaj otpornik definisana funkcijom:

$$i(t) = I_m \cos 2\pi f_1 t$$

tada je promjena napona na otporniku $v(t)$ odredjena relacijom:

$$\begin{aligned} v(t) = R(t)i(t) &= R_0 I_m \cos 2\pi f_1 t + R_m I_m \cos 2\pi \frac{(f_1 + f)t}{2} \\ &+ R_m I_m \cos 2\pi \frac{(f_1 - f)t}{2} \end{aligned} \quad (3.6)$$

U izrazu za napon $v(t)$, pored sinusnog člana frekvencije f_1, pojavljuju se i sinusni članovi frekvencija $(f_1 - f)$ i $(f_1 + f)$. To znači da linearni vremenski promjenljivi otpornik, kod koga je vi karakteristika definisana izrazom 3.5, ima osobinu transformacije sinusnog signala frekvencije f_1 u sinusne signale frekvencija $(f_1 + f)$ i $(f_1 - f)$. Ova osobina vremenski promjenljivih otpornika naziva se modulacija i koristi se u prenosu signala.

3.1.1 Vezivanje otpornika

U poglavlju 2 pokazali smo da se različiti načini vezivanja sistema opisuju relacijama izmedju ulaznih i izlaznih signala povezanih sistema. Vezivanje elemenata kola se opisuje relacijama koje povezuju struje i napone na pristupima elemenata. Pri tome ograničenja koja na varijable stanja nameći Kirhofovi zakoni vrijede bez obzira na karakter veze. U osnovama elektrotehnike definisane su redna i paralelna veza LVN otpornika i način izračunavanja ekvivalentnog otpora za ove veze. U nastavku ovog poglavlja izvedene su relacije koje opisuju rednu i paralelnu vezu otpornika za različite klase vi karakteristika.

Redna veza otpornika R_1, definisanog karakteristikom $f_1(v_1, i_1, t) = 0$ i otpornika R_2, definisanog karakteristikom $f_2(v_2, i_2, t) = 0$, prikazana je na slici 3.8.

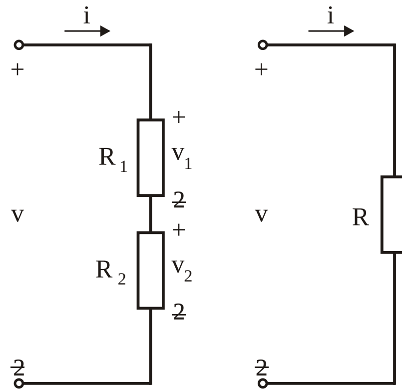


Figure 3.8: Redna veza otpornika

Općenito, redna veza dva elemenata kola opisana je relacijama:

$$i = i_1 = i_2$$

$$v = v_1 + v_2 \tag{3.7}$$

Ako su otpornici R_1 i R_2 strujno kontrolisani elementi, odnosno ako se njihove karakteristike za izabrani trenutak t mogu prikazati u formi:

$$\begin{aligned} v_1 &= f_1(i_1) \\ v_2 &= f_2(i_2) \end{aligned} \tag{3.8}$$

ekvivalentnu karakteristiku redne veze $v = f(i)$ možemo definisati relacijom:

$$v = v_1 + v_2 = f_1(i_1) + f_2(i_2) = |i = i_1 = i_2| = f_1(i) + f_2(i) = f(i)$$

Prema tome, za n–strujno kontrolisanih otpornika vrijedi:

$$v = f(i) = \sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} f_k(i_k) = \sum_{k=1}^{n} f_k(i) \tag{3.9}$$

Za linearne otpornike za koje vrijedi:

$$v_k = R_k i_k$$

za rednu vezu n–otpornika (R_k, $k = 1, 2, \ldots, n$) ekivalentni otpor redne veze R izračunavamo prema relacijama:

$$v = Ri = \sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} R_k i_k = \sum_{k=1}^{n} R_k i = i \sum_{k=1}^{n} R_k$$

odakle je:

$$R = \sum_{k=1}^{n} R_k \tag{3.10}$$

Paralelna veza otpornika R_1, koji je definisan karakteristikom $f_1(v_1, i_1, t) = 0$ i otpornika R_2, definisanog karakteristikom $f_2(v_2, i_2, t) = 0$, prikazana je na slici 3.9.

Paralelna veza elemenata kola je opisana relacijama:

$$\begin{aligned} v &= v_1 = v_2 \\ i &= i_1 + i_2 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Ako su otpornici R_1 i R_2 naponski kontrolisani elementi, odnosno ako se njihove karakteristike mogu prikazati u formi:

$$\begin{aligned} i_1 &= g_1(i_1) \\ i_2 &= g_2(i_2) \end{aligned} \tag{3.12}$$

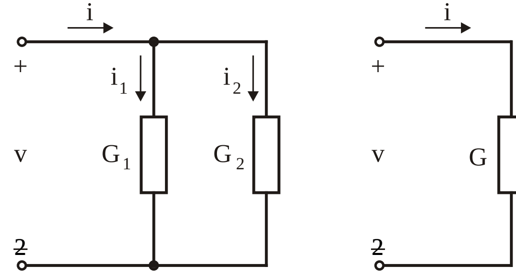


Figure 3.9: Paralelna veza otpornika

ekvivalentnu karakteristiku paralelne veze $i = g(v)$ mozemo definisati relacijom:

$$i = i_1 + i_2 = g_1(v_1) + g_2(v_2) = |v = v_1 = v_2| = g_1(v) + g_2(v) = g(v)$$

Prema tome za n–naponski kontrolisanih otpornika vrijedi:

$$i = g(v) = \sum_{k=1}^{n} i_k = \sum_{k=1}^{n} g_k(v_k) = \sum_{k=1}^{n} g_k(v) \tag{3.13}$$

Za otpornike koji su definisani karakteristikama $v_k = f_k(i_k)$ da bismo definisali odnose izmedju struja i napona pri paralelnoj vezi moraju se moći definisati funkcije:

$$i_k = f_k^{-1}(v_k) = g_k(v_k)$$

Za linearne otpornike za koje vrijedi:

$$i_k = G_k v_k$$

za paralenu vezu n–otpornika $(R_k, k = 1, 2, \ldots, n)$ ekivalentni otpor izračunavamo prema relacijama:

$$i = Gv = \sum_{k=1}^{n} i_k = \sum_{k=1}^{n} G_k v_k = \sum_{k=1}^{n} G_k v_k = v \sum_{k=1}^{n} G_k$$

odakle je:

$$G = \sum_{k=1}^{n} G_k$$

Tada vrijedi:

$$R = G^{-1} = \left[\sum_{k=1}^{n} G_k \right]^{-1} = \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k} \right]^{-1}$$

odakle konačno izvodimo:

$$\frac{1}{R} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k} \tag{3.14}$$

Za električno kolo, koje u odnosu na izabrani pristup sadrži otpornike, koji su povezani u kombinacije redno-pararelnih veza i čije karakteristike ispunjavaju uslove vezivanja, moguće je odrediti ekvivalentnu karakteristiku $f(v,i)=0$ u odnosu na izabrani pristup. Karakterističan primjer je kolo prikazano na slici 3.10 u kojem su LVN otpornici povezani u tzv. ljestvičastu mrežu.

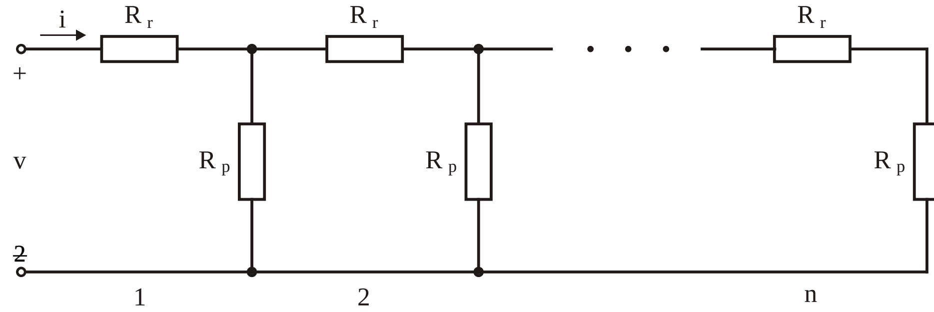


Figure 3.10: Ljestvičasta mreža LVN otpornika

Ulazni ekvivalentni otpor $R = v/i$ za prikazanu vezu n–segmenata otpornika R_r i R_p jednak je:

$$R = R_{r1} + \cfrac{1}{\cfrac{1}{R_{p1}} + \cfrac{1}{R_{r2} + \cfrac{1}{\cfrac{1}{R_{p2}} + \cdots + \cfrac{1}{R_{r,n-1} + \cfrac{1}{\cfrac{1}{R_{p,n-1}} + \cfrac{1}{R_{rn} + R_{pn}}}}}}}$$

3.1.2 Snaga, energija i pasivnost otpornika

Snaga koja se u trenutku t predaje otporniku R, odredjena je varijablama stanja pristupa $i(t)$ i $v(t)$, odnosno tačkom (i,v) na vi karakteristici otpornika u prostoru stanja, kao što je grafički prikazano na slici 3.11.

Površina pravougaonika, koji je ograničen i i v osama i radnom tačkom (i,v), jednaka je snazi koja se u trenutku t predaje otporniku (prenosi disipacijom izvan kola). Ako je radna tačka na vi karakteristici u I i III kvadrantu, odnosno ako je $v(t)i(t) > 0$, snaga $p(t)$ koja se predaje otporniku ima pozitivnu vrijednost $(p(t)>0)$. Za otpornik se kaže da je pasivan ukoliko njegova vi karakteristika za sve vrijednosti t leži u I ili III kvadrantu. Pri tome se uključuju i koordinatne ose, tako da se uslov pasivnosti za otpornike definiše relacijom $p(t)\geq 0$, koji vrijedi bez obzira na oblik signala generatora. Svi modeli otpornika prikazani u sekciji 3.1 pripadaju pasivnim elementima. Otpornik je aktivan ukoliko nije pasivan, odnosno ukoliko njegova vi karakteristika nije ograničena na I i III kvadrant.

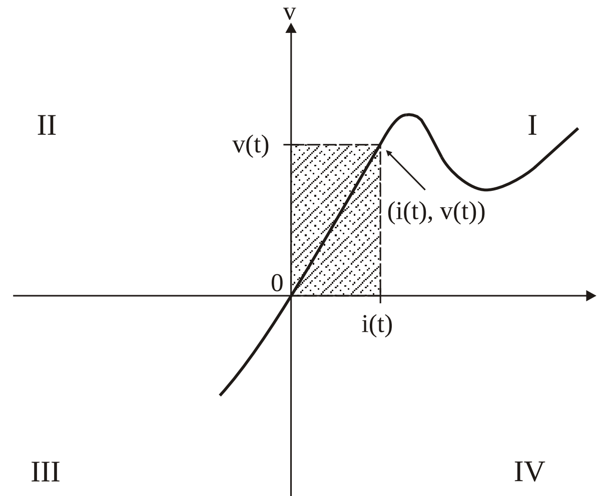


Figure 3.11: vi karakteristika i grafička interpretacija snage $p(t)$ otpornika R

Linearni otpornici imaju vi karakteristiku u obliku pravca $v(t) = R(t)i(t)$, koji prolazi kroz ishodište u vi koordinatnom sistemu. Uslov pasivnosti linearnih otpornika definiše se na sljedeći način:

- linearni otpornik je pasivan ako je $R(t) \geq 0$, za svako t,
- linearni otpornik je aktivan ako je $R(t) < 0$, za svako t.

Aktivan otpornik je element koji ima sposobnost generisanja energije u kolo u koje je priključen. Izmedju ostalog, aktivni otpornici se koriste za modelovanje procesa konverzije mehaničke u električnu energiju (npr. pri modelovanju generatorskog režima rada asinhronih električnih mašina). Za pasivne otpornike koji na pojedinim segmentima vi karakteristike imaju negativne nagibe vi karakteristike ($dv(t)/di(t) < 0$) definiše se pojam lokalne aktivnosti. Za otpornik se kaže da je lokalno aktivan u radnoj tački (i, v) ukoliko je nagib vi karakteristike u toj tački negativan. Nelinearni pasivni otpornici koji imaju osobinu lokalne aktivnosti (kao otpornik prikazan na slici 3.5) koristite se za realizaciju elektroničkih pojačala signala. Za aktivni otpornik se kaže da je lokalno pasivan u radnoj tački (i, v) ukoliko je nagib vi karakteristike u toj tački nenegativan.

3.2 Generatori signala

Za modelovanje generatora signala u električnim kolima koriste se modeli naponskog i strujnog generatora. Modeli generatora mogu biti:

- model nezavisnog generatora
- model zavisnog generatora.

Element kola sa dva kraja, čija je vrijednost generisanog napona $v_g(t)$ nezavisna od vrijednosti struje kroz element $i_g(t)$, naziva se nezavisni naponski generator. Analitički oblici napona $v_g(t)$ obično odgovaraju standarizovanim oblicima test signala, koji su obradjeni u ovom poglavlju. Nezavisni naponski generator je idealni element, jer osobinu nezavisnosti napona $v_g(t)$ od struje $i_g(t)$ mogu imati samo fizičke komponente zanemarivog unutrašnjeg otpora, induktiviteta i kapaciteta. U opštem slučaju nezavisni naponski generator je vremenski promjenljiv element pošto vrijednost napona $v_g(t)$ zavisi od vremena t. Na slici 3.12 prikazan je model nezavisnog naponskog generatora konstantne vrijednosti napona $v_g(t) = V_g$ i njegova vi karakteristika.

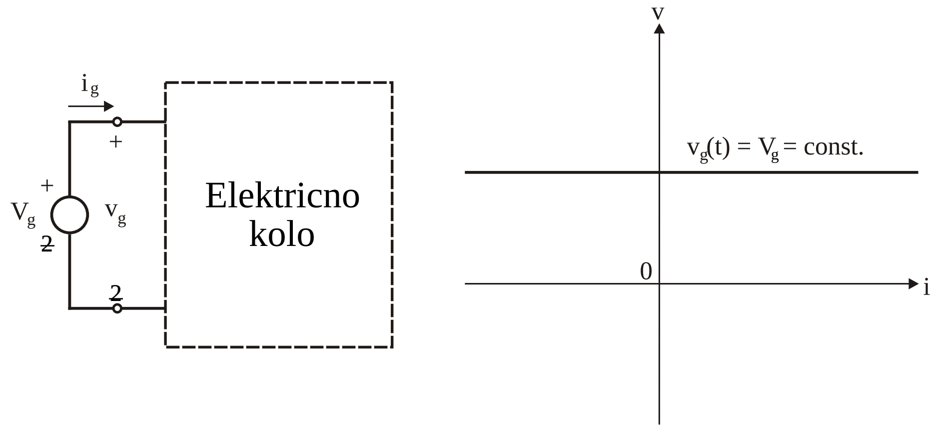


Figure 3.12: Model i vi karakteristika nezavisnog naponskog generatora

Smjerovi napona $v_g(t)$ i struje $i_g(t)$ odgovaraju referentnim smjerovima za generator i suprotni su od referentnih smjerova za otpornik. Snaga koju generator predaje kolu u koje je priključen, definisana je relacijom:

$$p_g(t) = p_i(t) = v_g(t) i_g(t) \tag{3.15}$$

Za usaglašene referentne smjerove $v_g(t) \geq 0$ i $i_g(t) \geq 0$ trenutna snaga generatora, koja se predaje kolu, nenegativna je veličina, odnosno vrijedi $p_g(t) \geq 0$. Idealni generatori mogu da generišu snagu i energiju neograničenog iznosa. Ukoliko je $i_g(t) < 0$ snaga se predaje iz kola naponskom generatoru, odnosno vrijedi $p_g(t) < 0$. Pošto se radi o idealnim modelima elemenata kola moguće je da se u kolu pojavi stanje sa ovakvim, obrnutim smjerom snage. Kao i kod otpornika, proces generisanja snage, odnosno proces konverzije izmedju nekog drugog oblika energije u električnu energiju unutar generatora, nije relevantan za izvodjenje modela idealnog generatora. Proces konverzije snage u generatorima po prirodi je suprotan procesu disipacije snage u otpornicima. Sa aspekta teorije sistema generatori se koriste za modelovanje prenosa snage ili informacije, koje sadrži pobudni signal, iz vanjskog okruzenja unutar kola. Pošto se ovaj proces odvija trenutno nezavisni generatori pripadaju klasi statičkih elemenata kola.

Element kola sa dva kraja, čija je vrijednost struje na pristupu $i_g(t)$ nezavisna od vrijednosti napona pristupa $v_g(t)$, naziva se nezavisni strujni generator. Nezavisni strujni generator je idealni element. U opštem slučaju, ovaj element kola pripada klasi vremenski promjenljivih elemenata. Na slici 3.13 prikazan je model nezavisnog strujnog generatora $i_g(t)=I_g=const$ i njegova vi karakteristika.

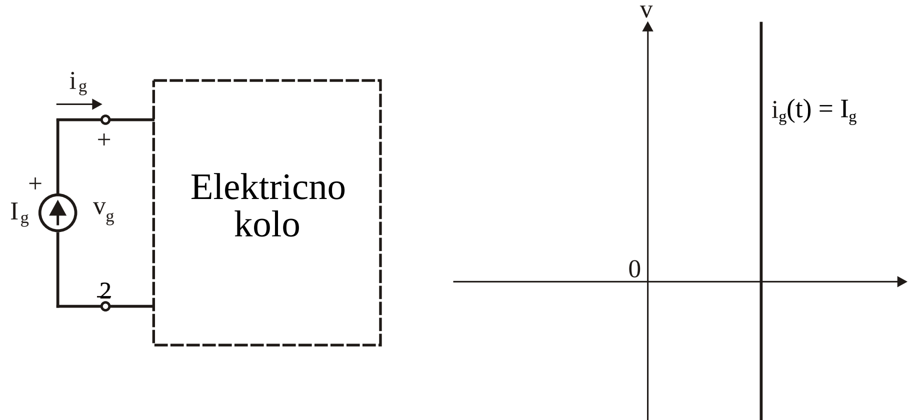


Figure 3.13: Model i vi karakteristika nezavisnog strujnog generatora

Nezavisni generatori pripadaju klasi nelinearnih elemenata. Karakteristike idealnih generatora sa konstantnom vrijednošću generisanih signala odgovaraju karakteristikama nelinearnih otpornika. Tako vi karakteristika idealnog naponskog generatora $v_g(t) = V_g$, koja je prikazana na slici 3.12, odgovara karakteristici strujno kontrolisanog nelinearnog otpornika, a karakteristika idealnog strujnog generatora $i_g(t)=I_g$, prikazana na slici 3.13, odgovara karakteristici naponski kontrolisanog nelinearnog otpornika. Za granične vrijednosti signala ovih generatora idealni generatori se ponašaju kao idealni prekidači u zatvorenom ($V_g=0$), odnosno otvorenom ($I_g=0$) položaju, respektivno. Posmatrani kao otpori, nezavisni naponski i strujni generatori predstavljaju modele aktivnih otpornika. Odavde se može izvesti uslov pasivnosti nezavisnih generatora. Za vrijednosti koordinata stanja (i, v) u II odnosno IV kvadrantu generatori kao aktivni otpornici predaju snagu priključenom vanjskom kolu, pošto tada vrijedi $p(t)=v(t)i(t)<0$. Kada se radna tačka generatora nalazi u I ili III kvadrantu, odnosno kada je $p(t) = v(t)i(t) > 0$ generatori se ponašaju kao pasivni otpornici, odnosno tada primaju energiju iz kola.

Pošto se idealni naponski generator može predstaviti kao nelinearni strujno kontrolisan otpornik, prema analogiji sa rednom vezom otpornika možemo definisati rednu vezu n idealnih naponskih generatora ($v_k, k=1, 2, \dots, n$), koja je ilustrovana na slici 3.14.

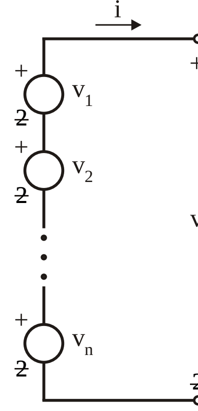


Figure 3.14: Redna veza idealnih naponskih generatora

Redna veza n idealnih naponskih generatora može se prikazati pomoću ekvivaletnog naponskog generatora v prema relacijama:

$$
\begin{aligned}
i &= i_1 = i_2 = \cdots = i_n \\
v &= \sum_{k=1}^{n} v_k
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

Analogno, idealni strujni generator može se predstaviti kao nelinearni naponski kontrolisan otpornik. Pošto se za strujni generator ne može definisati karakteristika $v = f(i)$, nezavisni strujni generatori se ne mogu povezivati u rednu vezu. Za nezavisne strujne generatore može se definisati paralelna veza n generatora $(i_k, k = 1, 2, \ldots, n)$, koja je ilustrovana na slici 3.15.

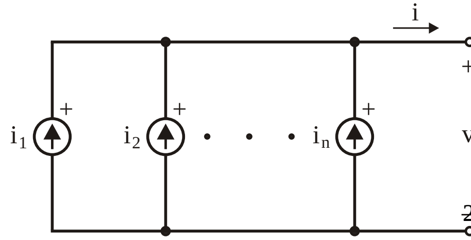


Figure 3.15: Paralelna veza idealnih strujnih generatora

Paralelna veza n idealnih strujnih generatora može se prikazati pomoću ekvivaletnog strujnog generatora i prema relacijama:

$$
v = v_1 = v_2 = \cdots = v_n
$$

$$i = \sum_{k=1}^{n} i_k \tag{3.17}$$

Pošto se za nezavisne naponske generatore ne može definisati karakteristika $i = g(v)$, oni se ne mogu vezivati u paralelnu vezu.

U realnim fizičkim komponentama nije moguće realizovati procese konverzije energije, koji imaju karakteristike nezavisnih (idealnih) generatora. Moguće je realizovati približno idealne karakteristike samo u ograničenim dijapazonima zavisne varijable generatora: struje kod naponskih i napona kod strujnih generatora. Zato je običajeno da se realni generatori predstavljaju pomoću kombinacije modela nezavisnih generatora i otpornika. Na slici 3.16 prikazan je model i *vi* karakteristika akumulatorske baterije, kao primjer modela realnog naponskog generatora.

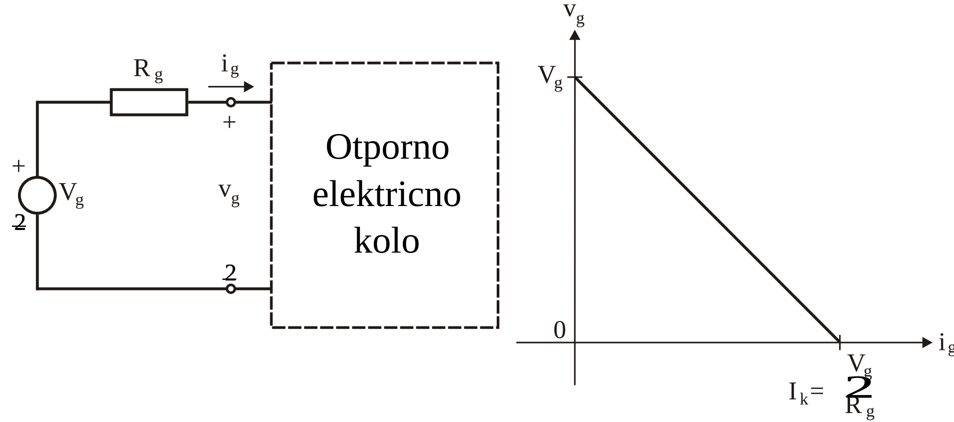


Figure 3.16: Model naponskog generatora sa unutrašnjim otporom R_g

Karakteristika baterije prikazana je za slučaj priključenja na čisto otporno kolo. Matematički model generatora, prikazanog na slici 3.16, predstavlja se funkcijom:

$$v_g = V_g - R_g i_g, \quad \text{za } I_k \geq i_g \geq 0$$

U modelu na slici 3.16 napon na krajevima generatora v_g zavisi od vrijednosti struje generatora i_g. Zavisnost generisanog napona v_g od struje i_g modelovana je pomoću otpora R_g, koji se naziva unutrašnji otpor generatora. Granični slučaj ovog modela, za $R_g = 0$, odgovara modelu idealnog naponskog generatora. Prema tome, za manje vrijednosti unutrašnjeg otpora ($R \to 0$) kvalitet naponskog generatora je bolji.

Do karakteristike prikazane na slici 3.16 može se doći posmatrajući realni generator kao rednu vezu LVN otpornika R_g i nelinearnog strujno kontrolisanog otpornika, koji predstavlja naponski generator. Na slici 3.17 prikazan je proces odredjivanja ekvivalentnog otpora za ovaj slučaj.

Za referentni smjer struje $i = -i_g$ vrijedi relacija:

$$v = f(i) = V_g + R_g i = V_g + R_g(-i_g) = f(i_g)$$

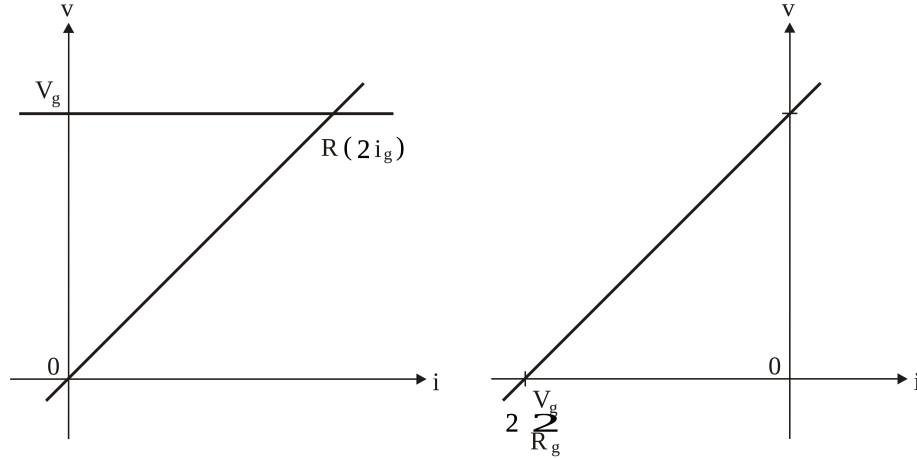


Figure 3.17: Redna veza otpornika $v = R_g i$ i nelinearnog otpornika $v = V_g$

Ukoliko se karakteristika $v = f(i)$ prikazana na slici 3.17.b prikaže u funkciji struje i_g, dobija se karakteristika koja je prikazana na slici 3.16. Analogni model za realni strujni generator prikazan je na slici 3.18.

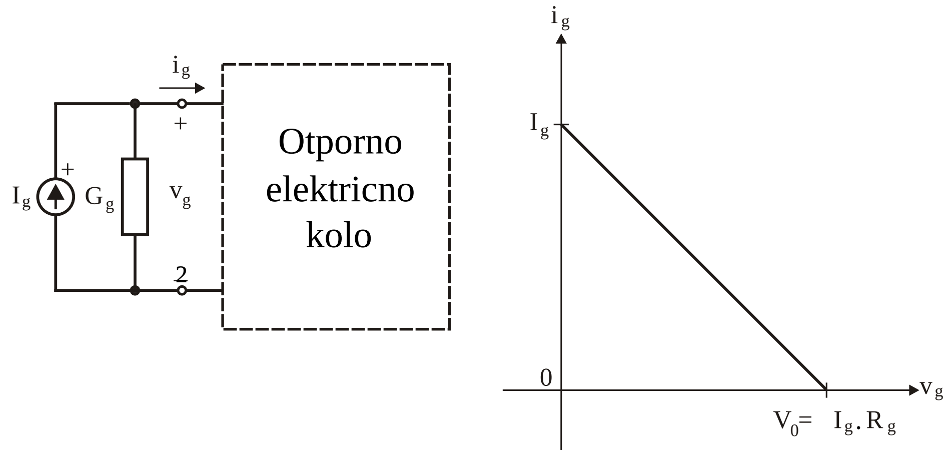


Figure 3.18: Model strujnog generatora sa unutrašnjom provodnošću G_g

Općenito, vrijednost napona naponskog generatora v_g i struje strujnog generatora i_g može da zavisi od vrijednosti proizvoljne varijable kola. Moguće su sljedeće kombinacije nezavisnih i zavisnih varijabli:

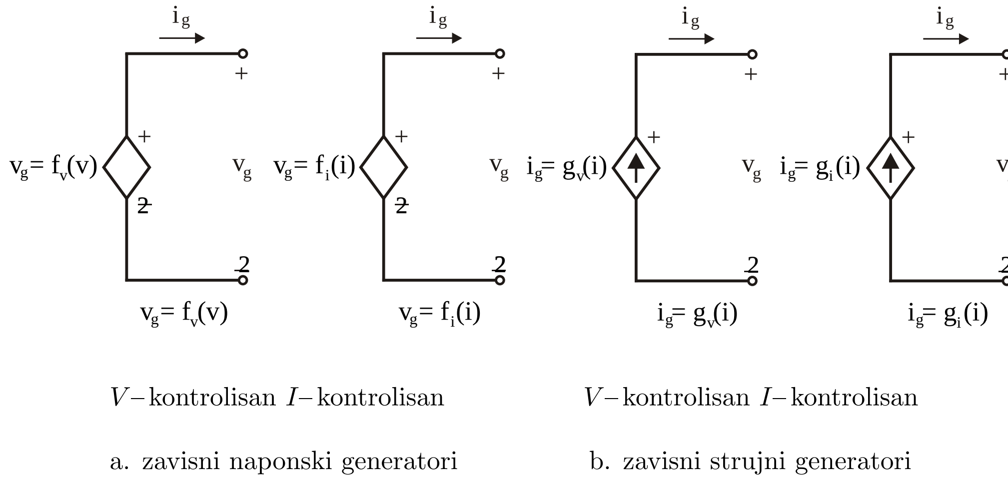
- za naponske generatore:

$$
\begin{aligned}
v_g &= f_v(v_k) \\
v_g &= f_i(i_k)
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

- za strujne generatore:

$$
\begin{aligned}
i_g &= g_v(v_k) \\
i_g &= g_i(i_k)
\end{aligned}
\qquad (3.19)
$$

Za modelovanje generatora, čiji su matematički modeli opisani jednačinama 3.18 i 3.19, koriste se modeli zavisnih generatora, koji su prikazani na slici 3.19.



$V-$kontrolisan $I-$kontrolisan $\qquad$ $V-$kontrolisan $I-$kontrolisan

a. zavisni naponski generatori $\qquad$ b. zavisni strujni generatori

Figure 3.19: Modeli zavisnih naponskih i strujnih generatora

Zavisni generatori imaju iste osobine kao i nezavisni generatori, osim sto je trenutna vrijednost generisanog signala (napona ili struje) zavisna od neke varijable kola. Ukoliko je zavisnost generisanog signala linearna funkcija nezavisne varijable, zavisni generatori su linearni. Detaljnija analiza karakteristika zavisnih generatora opisana je u poglavlju 5.

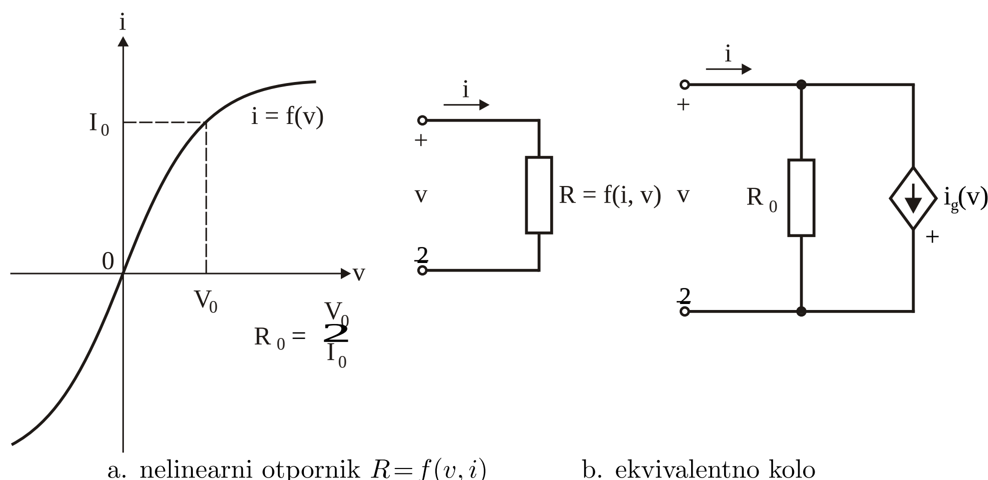
Zavisni generatori se mogu koristiti i za modelovanje nelinearnih otpornika. Nelinearni otpornik $R = f(v, i)$, čija je karakteristika prikazana na slici 3.20.a., može se modelovati pomoću kola koje sadrži naponski kontrolisani strujni generatora $i_g(v)$ i LVN otpornik R_0. Odgovarajuće kolo prikazano je na slici 3.20.b.

Funkcionalna zavisnost struje $i_g(v)$ naponski kontrolisanog strujnog generatora izvodi se iz uslova ekvivalentnosti vi karakteristika nelinearnog otpornika $i = g(v)$ i odgovarajućeg ekvivalentnog kola, odnosno prema jednačini:

$$i = g(v) = \frac{v}{R_0} + i_g(v)$$

odakle za $G_0 = 1/R_0$ slijedi:

$$i_g(v) = g(v) - G_0 v$$



a. nelinearni otpornik $R = f(v, i)$ b. ekvivalentno kolo

Figure 3.20: Ekvivalentni model nelinearnog otpornika

Vrijednost linearnog otpornika R_0 je proizvoljna veličina i izračunava se iz vrijednosti koordinata izabrane radne tačke (V_0, I_0) na vi karakteristici. Opisani postupak koristi se pri računarskoj simulaciji odziva nelinearnih kola, kada se rješenje kola odredjuje korištenjem iterativnih numeričkih postupaka.

3.2.1 Ekvivalentni Tevenenov i Nortonov generator

Izračunavanje vrijednosti ekvivalentnog otpora paralelne i redne veze otpornika kao i ekvivalentnih otpora pri transformaciji izmedju veza otpornika u spojevima zvijezda i trougao (poligon), predstavljaju jednostavne primjere ekvivalentovanja pasivnih otpornih kola. Koncept ekvivalentnog predstavljanja, moguće je primjeniti i za ekvivalentno predstavljanje složenih električnih kola, koja pored otpornih sadrže i aktivne elemente. Karakteristike ovakvih složenih kola u odnosu na izabrani pristup moguće je predstaviti pomoću ekvivalentnih generatora. U ovoj sekciji koncept ekvivalentnog predstavljanja kola biće izveden za slučaj statičkih linearnih kola, koja pored LVN otpornika sadrže nezavisne i linearno zavisne generatore.

Za električno kolo se kaže da je ekvivalentno sa originalnim kolom u odnosu na krajeve izabranog pristupa $(a - b)$ ukoliko struja i_{ab} i napon v_{ab} pristupa imaju identičan analitički oblik u ekvivalentnom i u originalnom kolu. Koncept ekvivalentovanog predstavljanja kola zasniva se na "ekvivalentnosti" vanjske karakteristike originalnog i izvedenog kola u odnosu na izabrani pristup. Dakle, ekvivalentno kolo se izvodi posmatrajuci model "crna kutija" originalnog kola. Na slici 3.21 prikazana je model "crna kutija" električnog kola u odnosu na izvedeni krajeve $a - b$.

Koncept ekvivalentovanja u odnosu na izabrani pristup, za kola koja sadrže pored otpornika i generatore, razvili su Tevenen i Norton. Oni su dokazali da

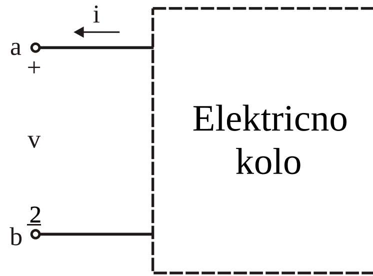
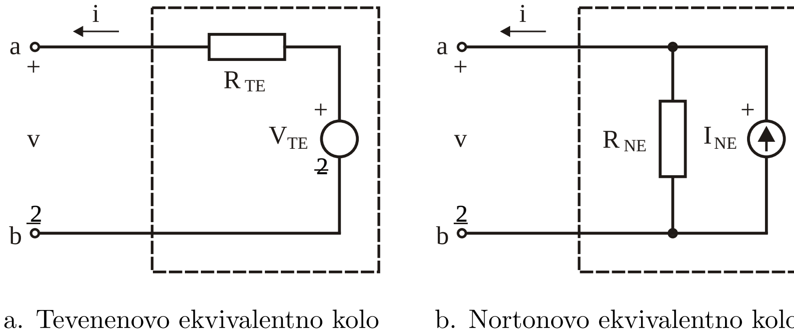


Figure 3.21: Model "crna kutija" električnog kola u odnosu na krajeve $a - b$

se za kolo, koje sadrži linearne otpornike i generatore (nezavisne i linearno zavisne), može definisati ekvivalentni generator, koji ima strukturu prikazanu na slici 3.22.a odnosno 3.22.b. Model ekvivalentnog generatora u kojem se koristi naponski generator naziva se Tevenenovo ekvivalentno kolo, a model ekvivalentnog generatora koje sadrži strujni generator, Nortonovo ekvivalentno kolo. U opštem slučaju signali generatora ekvivalentnih kola su kontinualne funkcije vremena t, odnosno vrijedi $v_{TE} = v_{TE}(t)$ i $i_{NE} = i_{NE}(t)$. Oblik funkcija $v_{TE}(t)$ i $i_{NE}(t)$ zavisi od karaktera signala na pristupu $a - b$ u originalnom kolu, odnosno od karaktera pobudnih signala i karakteristika kola.



a. Tevenenovo ekvivalentno kolo b. Nortonovo ekvivalentno kolo

Figure 3.22: Modeli ekvivalentnih generatora

Vrijednosti parametara ekvivalentnih kola: otpora R_{TE} i R_{NE} te napona v_{TE} i struje i_{NE} odredjuju se na osnovu opisanog principa o ekvivalentnosti kola u odnosu na izabrani pristup $a - b$. Ako se na pristup $a - b$ u originalnom kolu sa slike 3.21 i u ekvivalentnim kolima sa slika 3.22.a i 3.22.b priključi kolo proizvoljne strukture, tada struja $i_{ab}(t)$ i napon $v_{ab}(t)$ pristupa a–b moraju imati isti oblik za sva tri kola. U nastavku sekcije prikazan je postupak odredjivanja parametara ekvivalentnih kola za slučaj da originalno kolo sadrži nezavisne generatore konstantne vrijednosti pobudnih signala i linearno zavisne generatore. Za ovaj slučaj ekvivalentni generatori imaju konstantnu vrijednost signala, odnosno vrijedi $v_{TE} = V_{TE}$

i $i_{TE} = I_{TE}$.

Pretpostavimo da je izmedju krajeva $a-b$ priključen otpornik R. Vrijednosti parametara ekvivalentnih kola odredjuju se analizom režima "praznog hoda" i "kratkog spoja" ekvivalentnih kola. Režim praznog hoda odgovaraju stanju kola kada su krajevi $a-b$ nepovezani, odnosno kada je vrijednost otpora R sa slike 3.23 beskonačna ($R=\infty$).

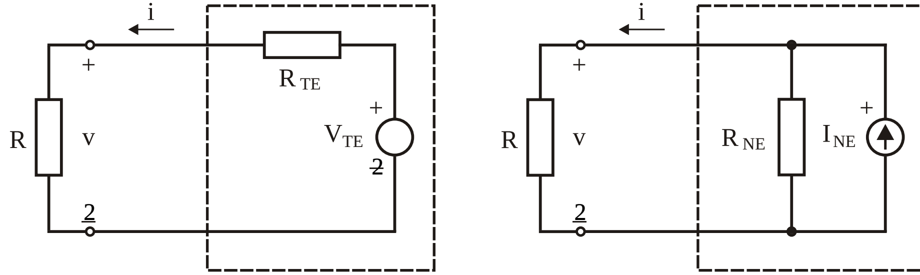


Figure 3.23: Priključenje otpora R na a.Tevenenovo i b. Nortonovo kolo

Za sva tri kola (originalno i ekvivalentna) vrijednost struje praznog hoda iznosi $i_{ab}(t)=i_0(t)=0$. Iz uslova ekvivalentnosti naponi $v_{ab}(t)=v_0(t)$ na krajevima svih kola moraju biti jednaki. Napon na krajevima originalnog kola za režim praznog hoda označimo sa $v_0(t)=V_0$. Tada iz uslova ekvivalentnosti kola slijedi:

$$V_0 = V_{TE} = I_{NE} R_{NE} \tag{3.20}$$

Režim kratkog spoja odgovara stanju kola kada su krajevi $a-b$ kratko spojeni, odnosno kada je vrijednost priključenog otpora $R=0$. Struju u originalnom kolu, u režimu kratkog spoja, označimo sa $i_{ab}(t)=i_k(t)=I_k$, odakle, iz uslova ekvivalentnosti, slijedi:

$$I_k = I_{NE} = \frac{V_{TE}}{R_{TE}} \tag{3.21}$$

Iz jednačina 3.20 i 3.21 izvode se relacije za odredjivanje parametara ekvivalentnih kola:

$$\begin{aligned} V_{TE} &= V_0 \\ I_{NE} &= I_k \\ R_{TE} &= \frac{V_{TE}}{I_k} = \frac{V_0}{I_k} \end{aligned} \tag{3.22}$$

odakle slijedi:

$$R_{NE} = \frac{V_0}{I_{NE}} = \frac{V_0}{I_k} = R_{TE} \tag{3.23}$$

Za LVN kola, koja ne sadrže zavisne generatore, vrijednost otpora R_{TE} može se

odrediti na osnovu pravila za ekvivalentovanje linearnih otpornika u kolu u kome su:

- svi nezavisni naponski generatori kratko spojeni ($R_g = 0$), odnosno ako se usvoji $v_g = 0$
- svi nezavisni strujni generatori otpojeni iz kola ($G_g = 0$), odnosno ako se usvoji $i_g = 0$

Opisanim postupkom uticaji nezavisnih generatora se eliminisu iz kola. Tako formirano kolo naziva se relaksirano kolo. Tada je vrijednost otpora $R_{TE} = R_{NE}$ jednaka ulaznom otporu R_{ab} izmedju krajeva $a-b$ u relaksiranom kolu.

Koncept ekvivalentnih kola koristi se u analizi složenih kola, ukoliko se zahtijeva analiza procesa na izabranom pristupu $a-b$. Treba napomenuti da Tevenenovo i Nortonovo ekvivalentno kolo ne daju informacije o stanju unutar kola nego samo, preko struje $i_{ab}(t)$ i napona $v_{ab}(t)$ pristupa, predstavljaju interakciju kola sa okruženjem u odnosu na krajeve $a-b$. Tevenenov generator ima vi karakteristiku kao model realnog naponskog generatora, prikazan na slici 3.16., za $V_g = V_{TE}$ i $R_g = R_{TE}$. Nortonov generator ima vi karakteristiku kao model realnog strujnog generatora, prikazan na slici 3.18., za $I_g = I_{NE}$ i $R_g = R_{NE}$.

Na osnovu vi karakteristika može se odrediti stanje kola pri priključenju LVN otpornika R na ekvivalentno kolo. Primjenom grafički postupka odredjivanja napona $v_{ab} = V$ i struje $i_{ab} = I$ za Tevenenovo ekvivalentno kolo, prikazan je na dijagramu na slici 3.24.

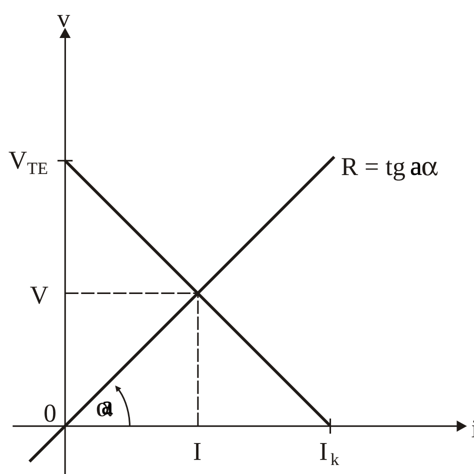


Figure 3.24: Grafička metoda odredjivanja stanja (V i I) LVN otpornika R

Prikazani postupak moze se primjeniti i za slučaj da je priključeni otpornik R_p nelinearan. Grafička metoda za slučaj nelinearnih vi karakteristika priključenog otpornika prikazana je na slici 3.25.

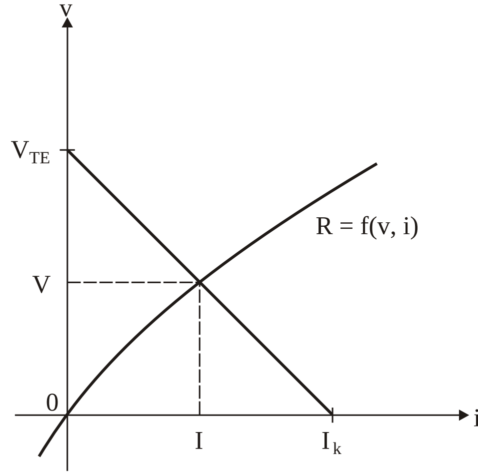


Figure 3.25: Grafička metoda odredjivanja stanja (V i I) nelinearnog otpornika

Pomoću Tevenenovog ekvivalentnog kola može se odrediti maksimalna snaga, koja se može predati potrosaču R_p, na pristupu električnog kola $a-b$. Problem je ilustrovan na slici 3.26, gdje je prikazano originalno kolo i odgovarajuće Tevenenovo ekvivalentno kolo.

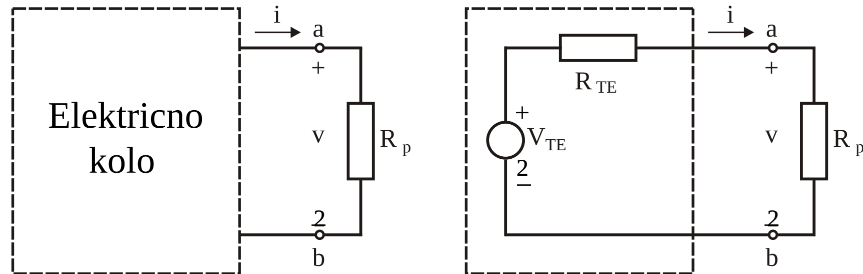


Figure 3.26: Odredjivanje maksimalne snage koja se može predati prijemniku R_p

Jednačine kola za slučaj konstantne vrijednosti napona V_{TE} su:

$$
\begin{aligned}
V &= V_{TE}\frac{R_p}{R_{TE}+R_p} \\
P_R &= \frac{V^2}{R_p} = \frac{V_{TE}^2}{R_p}\frac{R_p^2}{(R_{TE}+R_p)^2}
\end{aligned}
$$

Maksimalna snaga P_{Rmax}, koju kolo može predati prijemniku R_p, odredjuje se iz uslova maksimuma funkcije $P_R = f(R_p)$ izraženog uslovom:

$$\frac{\partial P_R}{\partial R_p} = 0$$

Rješavanjem jednačine:

$$\frac{\partial P_R}{\partial R_p} = V_{TE}^2 \frac{(R_{TE} + R_p)^2 - 2R_p(R_{TE} + R_p)}{(R_{TE} + Rp)^4} = 0$$

izvodimo:

$$R_{TE}^2 - R_p^2 = 0$$

odakle slijedi:

$$R_{TE} = R_p \tag{3.24}$$

Otpor $R_p = R_{TE}$ predstavlja vrijednost otpora prijemnika, za koju se na pristupu $a - b$ otporniku predaje maksimalna snaga:

$$P_{Rmax} = \frac{V_{TE}^2}{4R_{TE}} \tag{3.25}$$

Maksimalna snaga P_{Rmax} naziva se raspoloživa snaga kola na pristupu $a - b$. Dijagram promjene snage $P_R = f(R_p)$ prikazan je na slici 3.27.

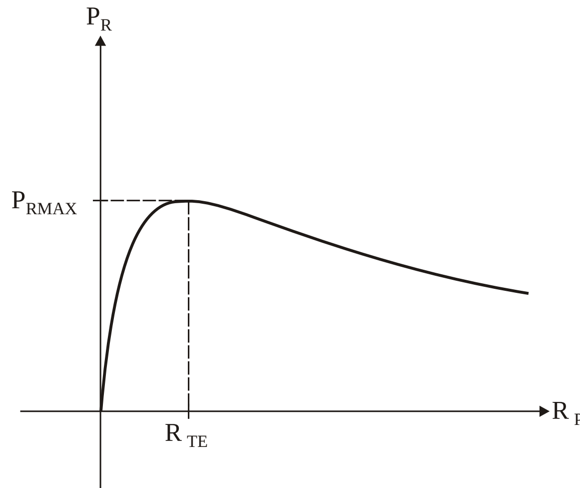


Figure 3.27: Dijagram promjene snage otpornika P_R u funkciji otpora R_p

3.3 Karakteristični oblici signala generatora

Za definisanje kontinualnih signala generatora $x(t)$ koristi se analitički oblik i/ili grafičko predstavljanje. Pored vremenskog oblika $x(t)$ za analizu odziva kola potrebno je poznavati izvod signala dx/dt i integral signala $\int x(t)dt$, posto se u jednačinama stanja kola, pojavljuju i ove operacije nad ulaznim signalima. U analizi električnih kola neki karakteristični oblici pobudnih signala imaju poseban značaj. U ovom poglavlju opisani su vremenski oblici funkcija, koji se koriste za predstavljanje standardnih pobudnih signala kola.

3.3.1 Jedinična odskočna funkcija

Jedan od najčesće koristenih oblika signala je model opisan *jediničnom odskočnom funkcijom*. Ova funkcija, koja se obično označava simbolom $u(t)$, ima vrijednost $u(t)=1$ za pozitivne vrijednosti argumenta $t>0$ i $u(t)=0$ za $t<0$. U trenutku $t = 0$, vrijednost funkcije se skokovito mijenja sa vrijednosti 0 na vrijednost 1. Funkcija $u(t)$ je funkcija nulte dimenzije. Dijagram funkcije $u(t)$ prikazan je na slici 3.28. U matematici funkcija $u(t)$ se naziva Hevisajdova funkcija.

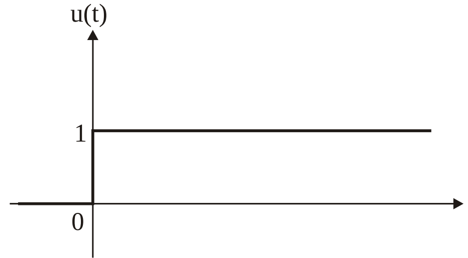


Figure 3.28: Jedinična odskočna funkcija $u(t)$

Jedinična odskočna funkcija $u(t)$ koristi se za predstavljanje procesa uključenja i isključenja generatora u kolo u trenutku $t=0$. Tako se uključenje generatora $v_g(t)$ u trenutku $t = 0$ modeluje naponskim generatorom $v_g(t)u(t)$. Za modelovanje uključenja/isključenja generatora, koja se dogadjaju u trenutku $t=t_0\neq 0$, koristi se vremenski pomjerena odskočna funkcija $u(t-t_0)$, čiji dijagram je prikazan na slici 3.29. Uključenje strujnog generatora $i_g(t)$ u trenutku $t=t_0$ modeluje se generatorom $i_g(t)u(t-t_0)$.

U analizi električnih kola često se koriste signali čiji analitički oblici su izvedeni korištenjem operacija sabiranja, množenja, diferenciranja i integralenja funkcije $u(t)$.

Stepenasta funkcija $s(t)$, koja se može predstaviti kao zbir odskočnih funkcija:

$$s(t) = u(t - t_1) - u(t - t_2) \tag{3.26}$$

prikazana je na slici 3.30. Stepenasta funkcija $s(t)$ može se predstaviti i kao

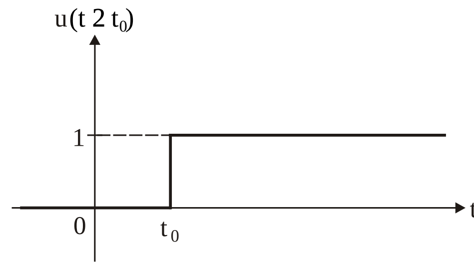


Figure 3.29: Pomjerena jedinična odskočna funkcija $u(t - t_0)$

proizvod odskočnih funkcija prema relaciji:

$$s(t) = u(t - t_1)u(t_2 - t) \tag{3.27}$$

kao što je prikazano na slici 3.31.

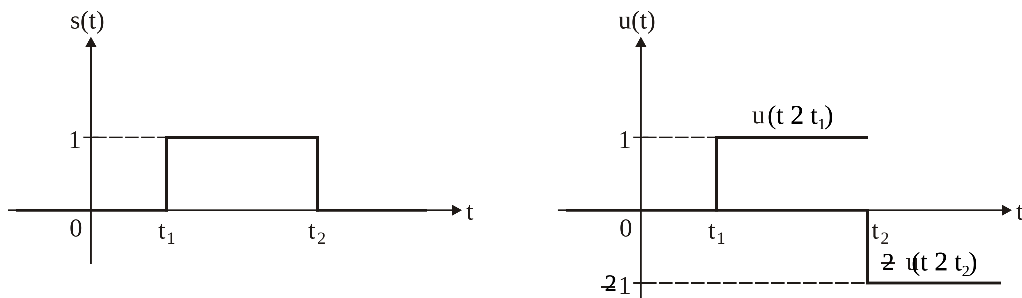


Figure 3.30: Stepenasta funkcija $s(t) = u(t - t_1) - u(t - t_2)$

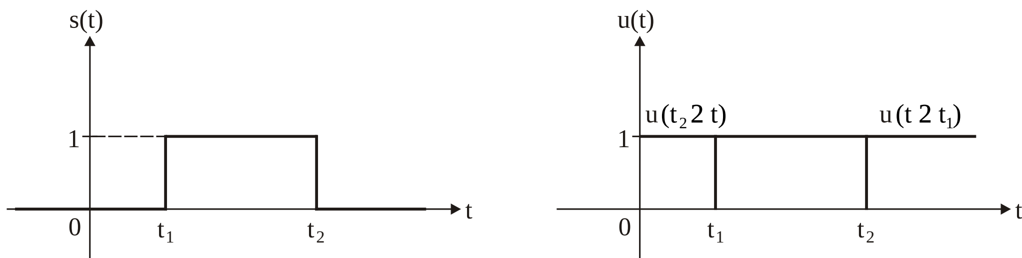


Figure 3.31: Stepenasta funkcija $s(t) = u(t - t_1)u(t - t_2)$

Integral jedinične odskočne funkcije $\int_{-\infty}^{t} u(\tau)d\tau$ koristi se pri za predstavljanje *usponskih* i *testerastih* funkcija. Na slici 3.32. prikazan je dijagram usponske funkcije $f(t) = (t - t_0)u(t - t_0)$.

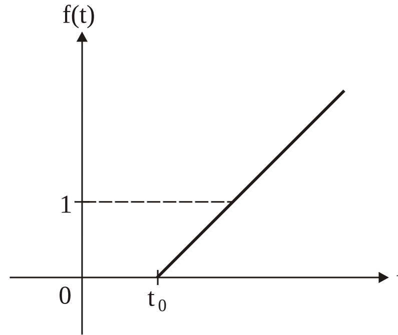


Figure 3.32: Dijagram funkcije $f(t) = (t - t_0)u(t - t_0)$

Funkcija $f(t)$ predstavlja integral funkcije $u(t - t_0)$, odnosno vrijedi:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau - t_0)\, d\tau = \int_{-\infty}^{t_0} u(\tau - t_0)\, d\tau + \int_{t_0}^{t} u(\tau - t_0)\, d\tau = 0 + \tau|_{t_0}^{t} = (t - t_0)$$

Dakle, za vrijednosti $t < t_0$, vrijedi $f(t) = 0$. Tada se funkcija $f(t)$ definise relacijama:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \leq t_0 \\ t - t_0, & t > t_0 \end{cases}$$

Funkciju $f(t)$ moguće je izraziti i pomoću pomjerene odskočne funkcije $u(t - t_0)$ relacijom:

$$f(t) = (t - t_0)u(t - t_0)$$

Funkcija $u(t)$ i pomjerena funkcija $u(t - t_0)$ često se koriste za modelovanje funkcija koje imaju vrijednost 0 u odredjenom vremenskom intervalu.

3.3.2 Jedinična impulsna funkcija

Pravougaona stepenasta funkcija $s(t)$, prikazana na slici 3.30., naziva se pravougaoni impuls. Matematički model pravougaonog impulsa, prikazanog na slici 3.33., definisan je relacijom:

$$s_\Delta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{\Delta}, & 0 < t < \Delta \\ 0, & \Delta < t \end{cases}$$

Površina ispod funkcije s_Δ ima vrijednost $\Delta \frac{1}{\Delta} = 1$. Ukoliko osnova impulsa s_Δ teži nuli, a površina impulsa ostaje ista, dobija se funkcija:

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} s_\Delta(t)$$

Amplituda funkcije $\delta(t)$ za vrijednost argumenta $t = 0$ ima vrijednost $\delta(0) \to \infty$, a za vrijednost argumenta $t \neq 0$ vrijedi $\delta(t) = 0$. Površina ispod funkcije $\delta(t)$,

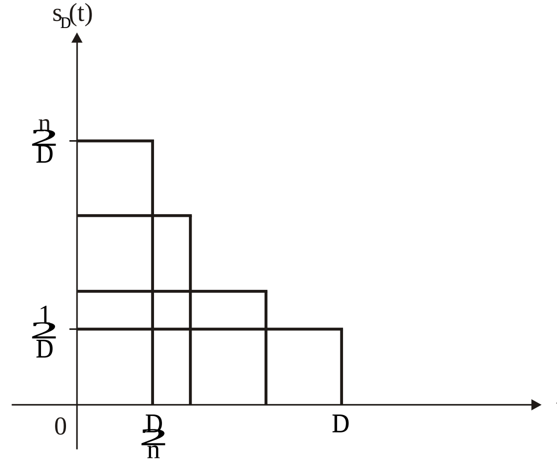


Figure 3.33: Dijagram pravougaonog impulsa $s_\Delta(t)$

odredjena integralom:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

naziva se jačinom impulsa. Funkcija $\delta(t)$ se naziva *jedinična impulsna funkcija* i definiše se relacijom:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \text{singularna} & t = 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1 & \end{cases} \tag{3.28}$$

Pomjerena jedinična impulsna funkcija $\delta(t - t_0)$ definiše se relacijom:

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} 0 & t \neq t_0 \\ \text{singularna} & t = t_0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0)dt = 1 & \end{cases} \tag{3.29}$$

Funkcija $\delta(t)$ pripada klasi neregularnih funkcija i koristi se u analizama električnih kola za približno predstavljanje fizičkih signala koji imaju karakteristike impulsa. Množenjem funkcije $\delta(t)$ sa konstantom k dobija se funkcija čiji impuls ima intenzitet k.

Impulsna funkcija $\delta(t)$ može se definisati i preko odskočne funkcije $u(t)$. Stepenastu funkciju $s_\Delta(t)$ prikažimo pomoću odskočne funkcije:

$$s_\Delta(t) = \frac{1}{\Delta}\left[u(t) - u(t - \Delta)\right] = \frac{u(t) - u(t - \Delta)}{\Delta}$$

Za $\Delta \to 0$ slijedi:

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{u(t) - u(t - \Delta)}{\Delta} = \frac{du}{dt} = \delta(t) \tag{3.30}$$

Prema tome, jedninična impulsna funkcija $\delta(t)$ predstavlja izvod jedinične odskočne funkcije $u(t)$. Medjusobna veza funkcije $u(t)$ i $\delta(t)$ može se i izraziti relacijom:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau \tag{3.31}$$

Takodje vrijedi:

$$u(t - t_0) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau - t_0)\, d\tau \tag{3.32}$$

Do istog rezultata moguće je doći i na drugi način, predstavljajući funkciju $u(t)$ pomoću aproksimacije $u_\Delta(t)$, prikazane na slici 3.34.

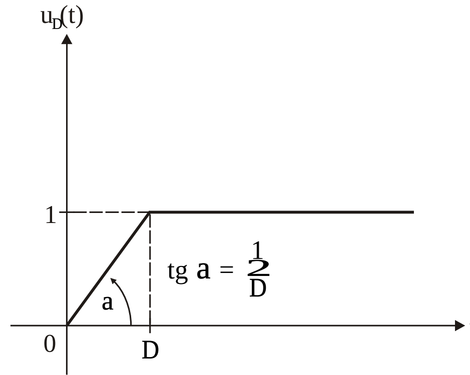


Figure 3.34: Aproksimacija jedinične odskočne funkcije $u(t)$ pomoću funkcije $u_\Delta(t)$

Izvod funkcije $u_\Delta(t)$ je funkcija $s_\Delta(t)$, odnosno vrijedi:

$$\frac{du_\Delta}{dt} = s_\Delta(t)$$

Za $\Delta \to 0$ slijedi:

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta \to 0} u_\Delta(t) &= u(t) \\
\lim_{\Delta \to 0} \frac{du_\Delta}{dt} &= \frac{du}{dt} \\
\lim_{\Delta \to 0} s_\Delta(t) &= \delta(t) = \frac{du}{dt}
\end{aligned}$$

U matematici funkcija $\delta(t)$ naziva se Dirakova funkcija i u tački $t = 0$ ima singularitet. Na slici 3.35. prikazan je grafik funkcije $\delta(t)$.

Jedinični impulsni signal ima osobinu da se pomoću njega može vršiti diskretizacija kontinualnog signala proizvoljnog oblika $f(t)$. Naime, integral proizvoda

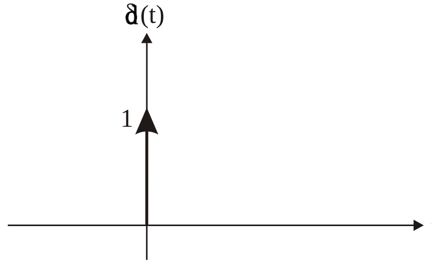


Figure 3.35: Grafik jedinične impulsne funkcije $\delta(t)$

funkcije $f(t)$ i pomjerenog jediničnog impulsnog signala $\delta(t-t_0)$ ima vrijednost:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_0)\,dt = \int_{t_0^-}^{t_0^+} f(t)\delta(t-t_0)\,dt = \\ &= f(t_0)\int_{t_0^-}^{t_0^+} \delta(t-t_0)\,dt = f(t_0)\,1 = f(t_0) \end{aligned}$$

Pretpostavlja se da funkcija je $f(t)$ kontinualna u intervalu $t_0^- \leq t \leq t_0^+$ i da ima konstantnu vrijednost $f(t_0)$. Ako u trenutku $t = t_0$ funkcija $f(t)$ ima prekid prve vrste, odnosno ako ima skok sa vrijednosti $f(t_0^-)$ na vrijednost $f(t_0^+)$, integral ima vrijednost:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_0)\,dt = \frac{1}{2}\left[f(t_0^-) + f(t_0^+)\right]$$

Ova osobina impulsne funkcije naziva se osobina odabiranja, pošto omogučava da se iz signala $f(t)$ odaberu vrijednosti $f(t_0)$.

Neke osobine $\delta(t)$ funkcije definisane su sljedećim relacijama:

$$\begin{aligned} \delta(at) &= \frac{1}{|a|}\delta(t) \\ \delta(-t) &= \delta(t) \\ f(t)\delta(t) &= f(0)\delta(t), \text{ uz uslov da je } f(t) \text{ kontinuirana funkcija u } t{=}0 \\ f(t)\delta(t-t_0) &= f(t_0)\delta(t-t_0), \text{ uz uslov da je } f(t) \text{ kontinuirana u } t{=}t_0 \end{aligned}$$

Pošto jedinična odskočna funkcija $u(t)$ ima nulte dimenzije, jedinična impulsna funkcija $\delta(t)$, kao njen izvod, ima prirodu frekvencije. Zbog toga se pri predstavljanju signala generatora, koji imaju karakter impulsa, koristi konstanta koja se množi sa funkcijom $\delta(t)$. Ova konstanta je po prirodi proizvod vremena i dimenzije generatorskog signala. Tako u slučaju da je pobudni signal struja $i_g(t)$ konstanta ima karakter količine elektriciteta Q, odnosno vrijedi:

$$i_g(t) = Q\delta(t) \tag{3.33}$$

Kada je pobuda napon $v_g(t)$ konstanta ima prirodu fluksa Φ, tako da vrijedi:

$$v_g(t) = \Phi\delta(t) \tag{3.34}$$

Ove konstante predstavljaju jačine udara pomenutih impulsnih eksitacija.

Premda impulsnu funkciju nije moguće diferencirati uvodi se pojam izvoda funkcije $\delta(t)$ koji se označava $\delta'(t)$ i naziva *dublet*. Definisanje funkcije $\delta'(t)$ ilustrovano je na slici 3.36

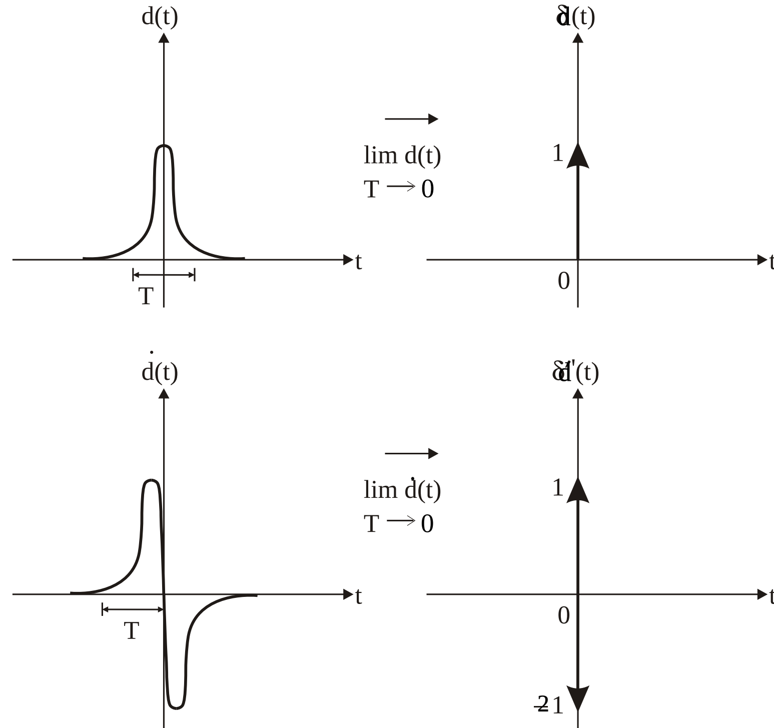


Figure 3.36: Definisanje funkcije $\delta'(t)$

Dublet se grafički predstavlja pomoć dva istovremena impulsa suprotnog smjera. Za $t \neq 0$ vrijedi $\delta'(t) = 0$, a za $t = 0$ dublet je singularna funkcija za koju vrijedi:

$$\int_{-\infty}^{t} \delta'(\tau)\, d\tau = \delta(t) \tag{3.35}$$

Jedinični dublet se formalno predstavlja izrazom:

$$\delta'(t) = \frac{\delta(t)}{dt} \tag{3.36}$$

Osobine singularne funkcije $\delta'(t)$ izražavaju se kao i kod impulsne funkcije $\delta(t)$ na osnovu njihovog efekta na kontinualnu funkciju $f(t)$. Integral koji opisuje osobinu odabiranja funkcije $\delta'(t)$ može se transformisati korištenjem pravila o parcijalnoj integraciji tako da izvodimo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t) f(t)\, dt = \delta(t) f(t)|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{t} \delta(t) f'(t)\, dt \;=\; 0 - f'(t)$$

Na analogan način definišu se impulsnie funkcije višeg reda: $\delta''(t), \ldots, \delta^{(n)}(t)$. Pri tome se osobina odabiranja funkcije $\delta^{(n)}(t)$ izražava relacijom:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(n)}(t) f(t) dt = (-1)^n f^{(n)}(t) \tag{3.37}$$

3.3.3 Jedinična usponska funkcija

U skupu funkcija $(\delta', \delta, u, \ldots)$ u kome je sljedeći član jednak integralu prethodnog člana, važan član niza čini *jedinična usponska* funkcija $r(t)$, koja je prikazana na slici 3.37. Usponska funkcija $r(t)$ izražava se pomoću odskočne funkcije $u(t)$

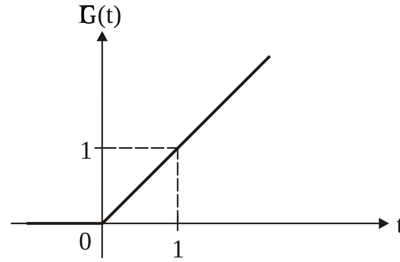


Figure 3.37: Grafik jedinične usponske funkcije $r(t)$

relacijom:

$$r(t) = tu(t) \tag{3.38}$$

pri čemu vrijedi:

$$r(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)\, d\tau = \begin{cases} 0 & \text{za } t < 0 \\ \int_{0^-}^{t} d\tau = t & \text{za } t \geq 0 \end{cases} \tag{3.39}$$

Pomjerena usponska funkcija $r(t - t_0)$ izražava se relacijom:

$$r(t - t_0) = (t - t_0) u(t - t_0) \tag{3.40}$$

3.3.4 Eksponencijalna funkcija

Signal oblika $f(t) = Ae^{-at}$ ($a \in \mathbf{R}$, $A \in \mathbf{R}$), naziva se eksponencijalni signal i često se koristi u analizi električnih kola. Dijagrami eksponencijalne funkcije za $a > 0$ i $a < 0$ prikazani su na slici 3.38.

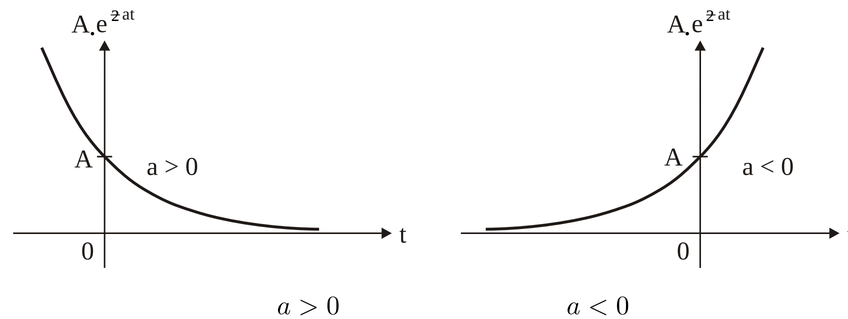


Figure 3.38: Grafici eksponencijalne funkcije Ae^{-at}

U analizi električnih kola obično se javlja signal oblika:

$$f(t) = Ae^{-at}u(t), \quad a > 0 \tag{3.41}$$

gdje se $A = f(0)$ naziva početna vrijednost signala. Grafik ovog signala za $a > 0$ i $A > 0$ prikazan je na slici 3.39.

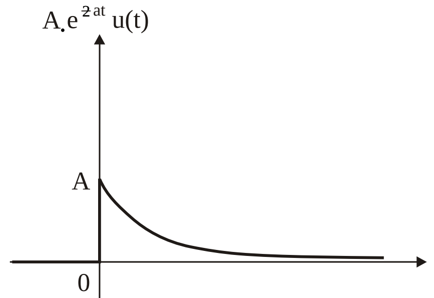


Figure 3.39: Grafik funkcije $Ae^{-at}u(t)$, za $a > 0$

Koeficijent a naziva se konstanta prigušenja signala i definiše brzinu opadanja signala. Pored koeficijenta a, za predstavljanje brzine opadanja signala koristi se i konstanta τ, koja ime dimenzije sekundi i koja definiše vrijeme t za koje eksponent $-at$ poprimi vrijednost -1. Tada vrijedi:

$$\begin{aligned} -\frac{a}{\tau} &= -1 \\ \tau &= \frac{1}{a} \end{aligned} \tag{3.42}$$

Koeficijent τ se naziva *vremenska konstanta prigušenja*. Vrijednost funkcije $f(t)$ za $t\!=\!\tau$ iznosi:

$$f(\tau) = Ae^{-a\tau} = Ae^{-1} = A\frac{1}{e}$$

kao što je prikazano na slici 3.40.

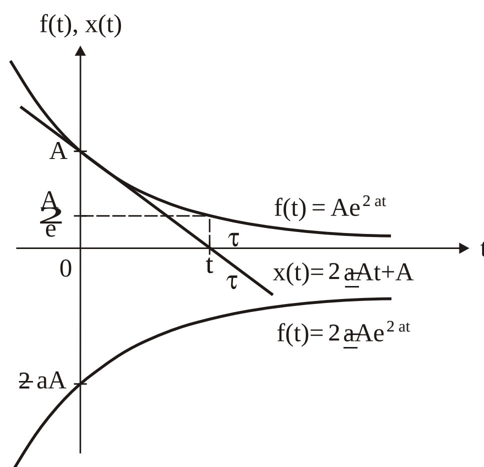


Figure 3.40: Grafik funkcija $f(t)\!=\!Ae^{-at}$ i $f'(t)$ i značenje konstante τ

U tabeli 3.1 prikazane su vrijednosti funkcije $f(t)$ za $A\!=\!1$ i za različite vrijednosti $t = \tau, 2\tau, 3\tau, \ldots$.

Tabela 3.1 Vrijednosti $e^{-t/\tau}$ za $t = \tau, 2\tau, 3\tau, \ldots$

t	0	τ	2τ	3τ	4τ	5τ	6τ	7τ
$e^{-t/\tau}$	1.0	0.3678	0.1353	0.0497	0.0184	0.0067	0.0024	0.0009

Iz tabele 3.1 uočava se da za $t > \tau$ vrijednost signala opada ispod 37% početne vrijednosti. U praktičnim, inženjerskim proračunima fižičkih sistema, zadovoljavajuća tačnost se postiže i približnim proračunom, gdje je odstupanje izračunatih vrijednosti od tačnih vrijednosti varijabli stanja manje od $\pm 0.1\%$. Zbog toga se, u praktičnim proračunima kola sa eksponencijalnim signalima zadovoljavajuća tačnost postiže za vremenski interval posmatranja odziva $t \leq 7\tau$.

Na slici 3.40. prikazana je i funkcija $df/dt = -\,aAe^{-at}$, koja predstavlja izvod funkcije $f(t)\!=\!Ae^{-at}$. Vrijednost izvoda u $t\!=\!0$ iznosi $df/dt|_{(t=0)} = -\,aA$, tako da jednačina pravca, koji predstavlja tangentu na funkciju $f(t)$ u tački $(0, A)$, ima oblik:

$$x(t) = -\,aAt + A$$

Ovaj pravac presijeca x–osu u tački $t\!=\!\tau$, pošto jednačina:

$$x(t) = -\,aAt + A = 0$$

ima rješenje za:

$$t = \frac{1}{a} = \tau$$

Prema tome, tangenta na funkciju $f(t)$ presjeca x–osu u tački $t\!=\!\tau$, kao što je prikazano na slici 3.40.

Izvod funkcije $f(t)\!=\!Ae^{-at}u(t)$ ima oblik:

$$\frac{df}{dt} = -aAe^{-at}u(t) + A\delta(t)$$

a integral:

$$I = \int_{-\infty}^{t} Ae^{-a\tau}u(\tau)\,d\tau = \int_{0}^{t} Ae^{-a\tau}\,d\tau$$

gdje je za $t\!\geq\!0$:

$$\begin{aligned} \int_0^t Ae^{-a\tau}\,d\tau &= A\int_0^t e^{-a\tau}\,d\tau = A\,\left.\frac{e^{-a\tau}}{-\,a}\right|_0^t \\ &= \frac{-A}{a}(e^{-at}-1) = \frac{A}{a}(1-e^{-at}) \end{aligned}$$

Tada možemo pisati:

$$I = \frac{A}{a}(1-e^{-at})u(t)$$

Dijagrami funkcija df/dt i $I = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$ za $f(t)\!=\!Ae^{-at}u(t)$ prikazani su na slici 3.41.

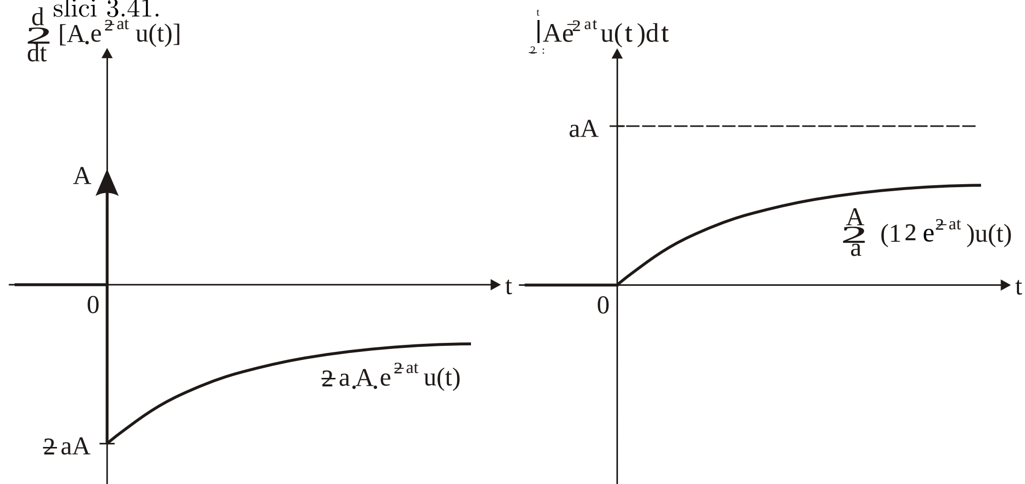


Figure 3.41: Dijagrami funkcija df/dt i $\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$ za $f(t) = Ae^{-at}u(t)$

3.3.5 Sinusna funkcija

Na slici 3.42. prikazan je sinusni (prostoperiodični) signal $f(\omega t)$, čiji je matematički model opisan relacijom:

$$f(t) = A\cos(\omega t + \theta) \tag{3.43}$$

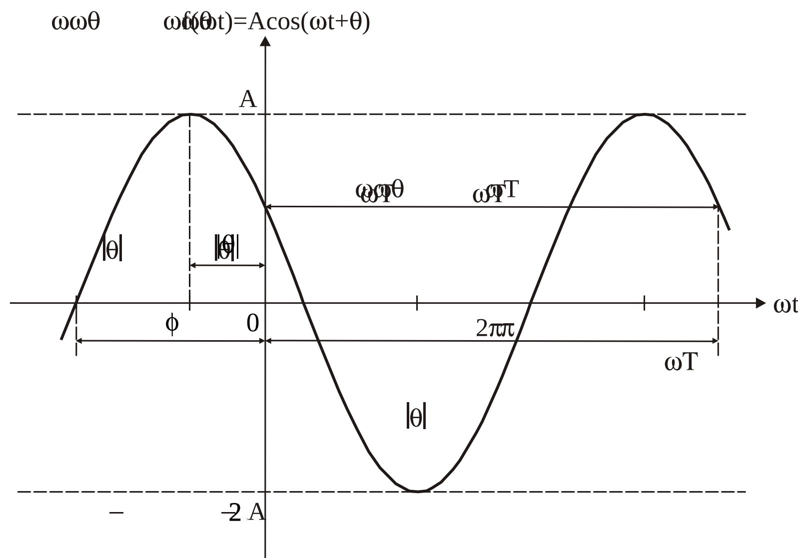


Figure 3.42: Sinusni (prostoperiodični) signal $f(\omega t) = A\cos(\omega t + \theta)$

Sinusni signal je definisan sa tri konstante: A, ω i θ, koje imaju sljedeće značenje:

- A je amplituda signala ($A \in \mathbf{R}$),
- ω je ugaona frekvencija za koju vrijedi $\omega = 2\pi f$, gdje je f frekvencija periodičnosti signala,
- θ je početni fazni ugao.

Za definisanje periodičnosti signala, pored ugaone frekvencije $\omega = 2\pi f$, koristi se i period oscilacija T, koji predstavlja vrijeme potrebno da se argument ugaone frekvencije ωt pomjeri sa vrijednosti 0 do vrijednosti 2π, odnosno vrijedi:

$$\begin{aligned} \omega T &= 2\pi \\ T &= \frac{2\pi}{\omega} \end{aligned} \tag{3.44}$$

Period oscilacija T uobičajeno se koristi za predstavljanje osobine periodičnosti funkcije. Periodičnost sinusne funkcije $f(t)$ izražava se relacijom:

$$f(t) = f(t + nT), \; n = 1, 2, \ldots \tag{3.45}$$

Osobina periodičnosti sinusne funkcije dokazuje se iz relacija:

$$\begin{aligned} A\cos[\omega(t+nT)+\theta] &= A\cos(\omega t+\omega nT+\theta) = A\cos(\omega t+n2\pi+\theta) \\ &= A\cos(\omega t+\theta) \end{aligned}$$

posto je $T\!=\!n2\pi$ period ponavljanja funkcije $f(\omega t)\!=\!\cos(\omega t)$. Prostoperiodična funkcija $f(t)\!=\!\cos(\omega t+\theta)$ može se izraziti i preko sinusne funkcije. Na osnovu jednakosti:

$$\cos(\omega t+\theta) = \sin(\omega t+\theta+\frac{\pi}{2}) = \sin(\omega t+\phi)$$

slijedi:

$$\phi = \theta + \frac{\pi}{2}$$

odnosno,

$$f(t) = A\sin(\omega t+\phi)$$

Priključenje generatora sinusnog oblika pobudnog signala $f(t)$ na električno kolo u trenutku $t=0$, modeluje se pomoću funkcije:

$$g(t) = f(t)u(t) = A\cos(\omega t+\theta)u(t) \tag{3.46}$$

čiji grafik je prikazan na slici 3.43. Početna vrijednost funkcije $g(t)$ za $t=0$ iznosi $g(0)=A\cos\theta$.

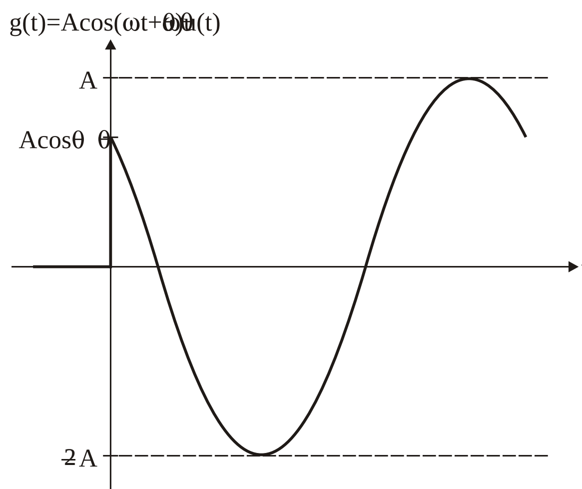


Figure 3.43: Grafik funkcije $g(t) = A\cos(\omega t+\theta)u(t)$

Na osnovu prostih trigonometrijskih pravila moguće je dokazati da je zbir dva sinusna signala frekvencije f, sinusni signal iste frekvencije, odnosno zbir signala $v_1(t)\!=\!V_{m1}\cos(\omega t+\theta_1)$ i signala $v_2(t)\!=\!V_{m2}\cos(\omega t+\theta_2)$, predstavlja signal $v(t)\!=\!v_1(t)+v_2(t)\!=\!V_m\cos(\omega t+\theta)$.

2 θ

2

Opisano pravilo vrijedi i za signal $g(t)=f(t)u(t)$. Medjutim, funkcije $f(t)$ i $g(t)$ se razlikuju. Periodična funkcija $f(t)$ ima osobinu periodičnosti za interval $-\infty<t<+\infty$ dok funkcija $g(t)$ ima periodičan karakter za interval $0<t<+\infty$. Rezultati operacija diferenciranja i integralenja funkcija $f(t)$ i $g(t)$ takodje se razlikuju. Izvod funkcije $dg(t)/dt$ i integral $\int_{-\infty}^{t} g(t)dt$ prikazani su na slici 3.44.

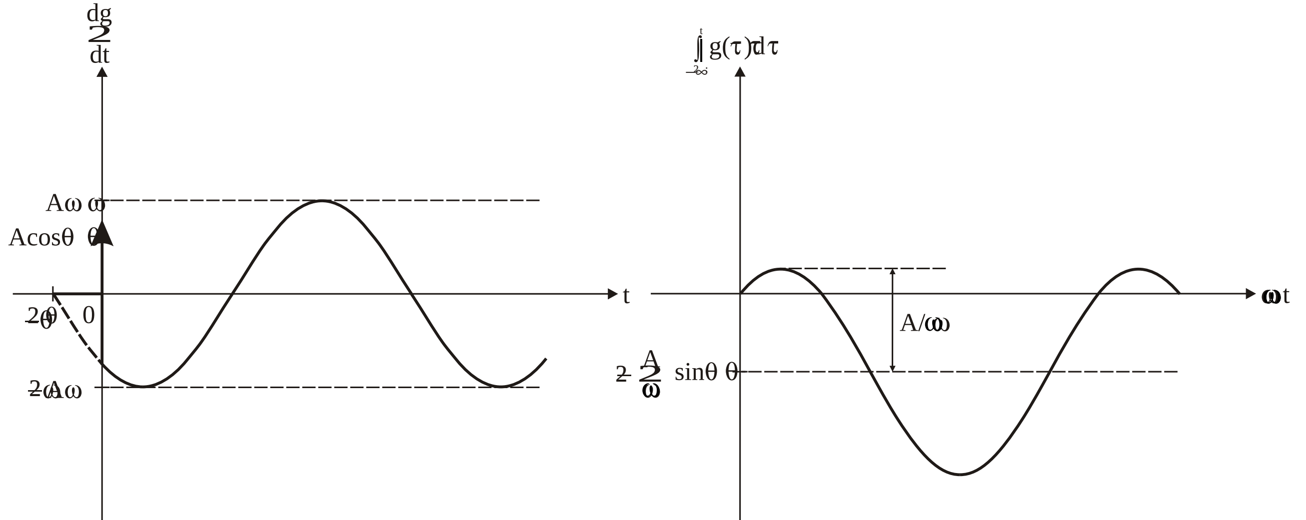


Figure 3.44: Dijagrami funkcija dg/dt i $\int_{-\infty}^{t} g(\tau)d\tau$

Izvod funkcije $g(t)$ ima oblik:

$$\begin{aligned}
\frac{dg}{dt} &= \frac{d}{dt}\left[f(t)u(t)\right] = \frac{d}{dt}\left[A\cos(\omega t+\theta)u(t)\right] \\
&= A\cos(\omega t+\theta)\delta(t) + (-A\omega)\sin(\omega t+\theta)u(t) \\
&= A\cos(\theta)\delta(t) - A\omega\sin(\omega t+\theta)u(t)
\end{aligned}$$

Integral I funkcije $g(t)$ ima oblik:

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-\infty}^{t} g(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{t} A\cos(\omega\tau+\theta)u(\tau)\,d\tau \\
&= \frac{A}{\omega}\sin(\omega\tau+\theta)\Big|_0^t = \frac{A}{\omega}\left[\sin(\omega t+\theta)-\sin\theta\right]u(t)
\end{aligned}$$

i predstavlja prostoperiodični signal sa konstantnim istosmjernim pomakom amplitude za vrijednost $-(A/\omega)\sin\theta$.

Iz prethodno izvedenih osobina sinusne funkcije slijedi da linearne operacije nad sinusnim signalima: sabiranje, diferenciranje i integralenje ne izazivaju promjenu analitičkog oblika signala. U opštem slučaju, transformisani signali imaju različitu amplitudu i početni fazni stav, a mogu sadržavati i istosmjerni (DC) pomak po amplitudi. Odatle zaključujemo da su pomenute operacije nad signalima linearne transformacije, a odgovarajući operatori linearni.

3.3.6 Eksponencijalno sinusna funkcija

Periodična funkcija sinusnog oblika, kod koje se amplituda mijenja po eksponencijalnom zakonu predstavlja se matematickim modelom:

$$f(t) = Ae^{-at}\cos(\omega t + \theta) \tag{3.47}$$

i naziva se *eksponencijalno sinusna* ili pseudoperiodična funkcija. Na slici 3.45 prikazan je grafik funkcije $f(t)u(t)$, koja se često koristi za opis signala u analizi električnih kola. Početna vrijednost signala $f(t)$ iznosi $A\cos\theta$. Prostoperiodični signal se može posmatrati kao granični slučaj pseudoperiodičnog signala, kod koga je $a = 0$.

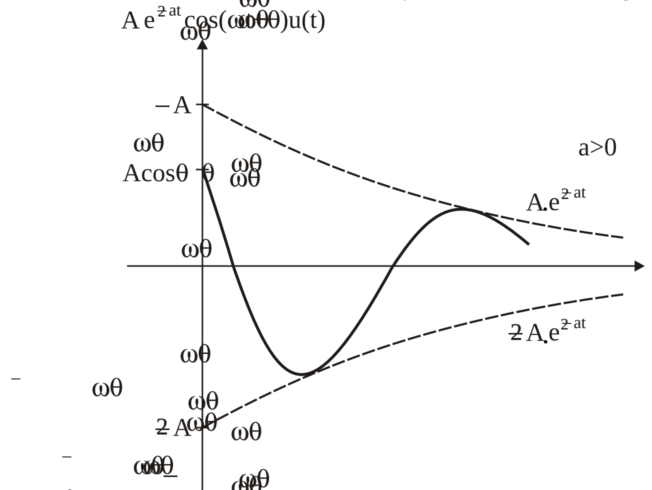


Figure 3.45: Eksponencijalno sinusna funkcija $f(t) = Ae^{-at}\cos(\omega t + \theta)$ (za $a > 0$)

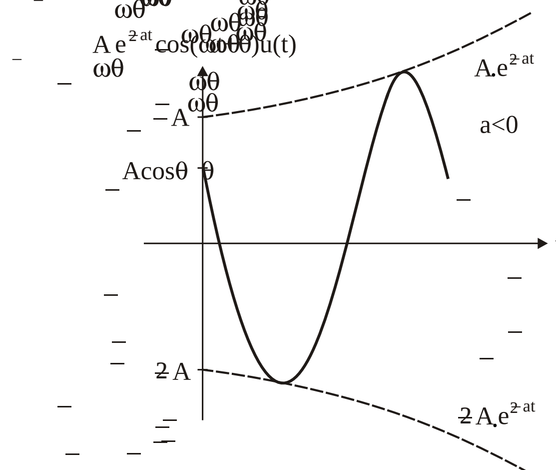


Figure 3.46: Eksponencijalno sinusna funkcija $f(t) = Ae^{-at}\cos(\omega t + \theta)$ (za $a < 0$)

Kao i kod sinusne funkcije moguče je definisati period $T = 2\pi/\omega$, koji za eksponencijalno sinusnu funkciju predstavlja vrijeme izmedju uzastopnih maksimuma

(minimuma) funkcije. Funkcija $f(t)$ za $a>0$ ima eksponencijalno opadajuću amplitudu i bez obzira na vrijednost frekvencije ω njena vrijednost je ograničena na prostor izmedju krivih Ae^{-at} i $-Ae^{-at}$. Zbog toga se ove krive nazivaju ovojnicama funkcije $f(t)$. Za vrijednost $a<0$ dijagram funkcije $f(t)u(t)$ prikazan je na slici 3.46.

3.3.7 Opšta periodična funkcija

U analizi električnih kola često se koriste periodični signali, koji nemaju čist sinusni oblik. Vrijednost amplitude ovih signala regularno se ponavlja svakih T sekundi u cijelom intervalu $(-\infty, +\infty)$. Vrijeme T naziva se period signala i vrijedi $f(t)=f(t+nT)$, za $n=\pm1, \pm2, \ldots$. Na slici 3.47 prikazani su dijagrami nekih karakterističnih oblika periodičnih funkcija, koji se koriste u analizi električnih kola. Periodični signali koji nemaju prostoperiodični oblik nazivaju se složenoperiodični signali.

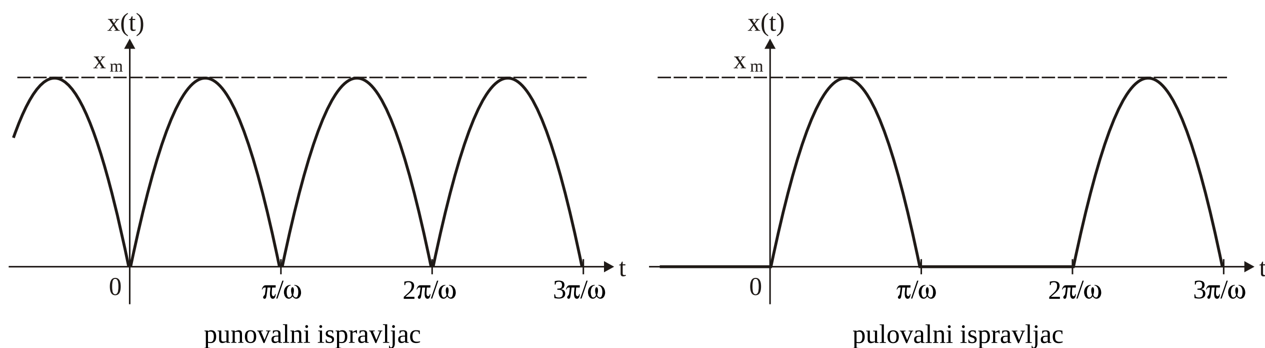


Figure 3.47: Karakteristični obliči periodičnih signala

3.3.8 Diskretni i digitalni signali

Pojam diskretnih i digitalnih signala uveden je u poglavlju 2.1. U poglavlju 3.3.2 opisana je proces diskretizacije vremenski kontinualnih signala, koristenjem osobine odabiranja impulsne funkcije $\delta(t)$. Rjesavanje odziva LVN kola na pobudne signale u obliku diskretnih funkcija bazirano je na ovoj osobina funkcije $\delta(t)$ odnosno na koristenju koncepta idealne diskretizacije. Idealna diskretizacija signala proizvoljnog oblika izvodi se koristenjem niza δ-impulsa, kojeg čini suma beskonačnog broja pomjerenih jediničnih impulsnih funkcija:

$$X_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$

Niz δ-impulsa prikazan je na slici 3.48.

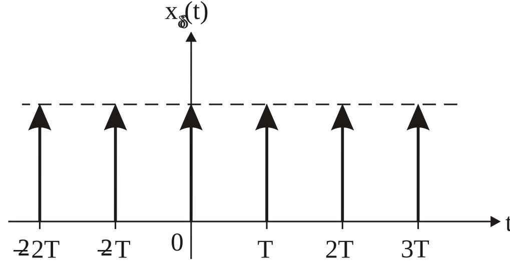


Figure 3.48: Dijagram niza δ-impulsa

Konstanta T naziva se period odabiranja (diskretizacije). Proizvod kontinualnog signala $x(t)$ i niza δ impulsa $X_\delta(t)$ predstavlja niz impulsa $x[nT]$ koji je grafički predstavljen na slici 3.49.

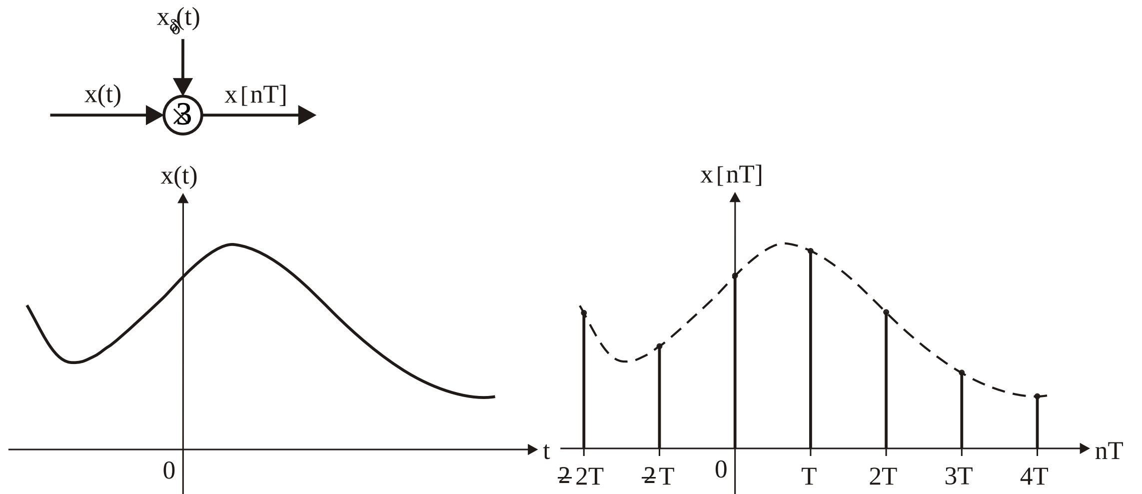


Figure 3.49: Simbolički model idealne diskretizacije kontinualnog signala $x(t)$

Niz $x[nT]$ opisuje diskretni signal koji je formiran u procesu idealne diskretizacije signala $x(t)$. Za $t\!=\!nT$ diskretni signal $x[nT]$ ima vrijednost impulsa jednaku $x(nT)$, što predstavlja vrijednost kontinualnog signala $x(t)$ za $t\!=\!nT$, pošto vrijedi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t-nT)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(nT)\delta(t-nT)\,dt = x(nT)\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)\,dt = x(nT)$$

Chapter 4

Dinamički elementi kola sa jednim pristupom

Pomoću dinamičkih elemenata električnih kola sa jednim pristupom, kondenzatora i zavojnice, modeluju se procesi akumuliranja električne energije. Kod dinamičkih elemenata kola vi karakteristika je opisana diferencijalnom jednačinom prvog reda. To znači da za $t \geq t_0$ promjena varijable stanja $y(t)$, koja definiše energetsko stanje elementa, zavisi od količine zatečene akumulirane električne energije u posmatranom elementu, odnosno od vrijednosti varijable stanja $y(t_0)$ u $t = t_0$. Pošto se energetsko stanje dinamičkih elemenata ne može trenutno mijenjati, u kolima koja sadrže dinamičke elemente (dinamičkim kolima), odziv kola $y(t)$ sadrži pored stacionarne i tranzijentnu komponentu. Vrijednost varijable stanja u trenutku $t = t_0$ naziva se početna vrijednost varijable, a vrijednost zatečene akumulirane energije elementa, početna energija. U ovom poglavlju obradjene su karakteristike i klasifikacija dinamičkih elemenata sa jednim pristupom: kondenzatora i zavojnice.

4.1 Kondenzator - dinamički kapacitivni element

Sposobnost akumuliranja elektrostatičke energije u realnim, fizičkim komponentama predstavlja se u električnim kolima modelom idealnog kondenzatora. Idealni kondenzator je element kola sa dva kraja kod koga je u svakom trenutku vremena t odnos izmedju naelektrisanja $q(t)$ i napona izmedju njegovih krajeva $v(t)$ jednoznačno definisan qv karakteristikom, koja je opisana algebarskom funkcijom:

$$q(t) = f(v, t) \tag{4.1}$$

Pri tome vrijedi:

$$q(t) = \int_{-\infty}^{t} i(\tau)\, d\tau \tag{4.2}$$

Kao i kod otpornika, u zavisnosti od osobina qv karakteristike, definišu se sljedeće klase modela kondenzatora:

- linearni (L)
- nelinearni (N)

te:

- vremenski nepromjenljiv (VN)
- vremenski promjenljiv (VP)

Na slici 4.1 prikazan je grafički simbol, sa naznačenim usaglašenim smjerovima za varijable stanja $q(t)$,$v(t)$ i $i(t)$ i odgovarajuća qv karakteristika nelinearnog kondenzatora, koja je simetrična u odnosu na koordinatni početak.

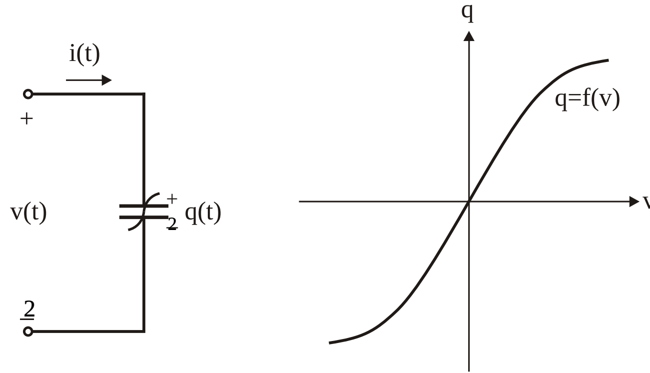


Figure 4.1: Grafički simbol i qv karakteristika nelinearnog kondenzatora

Kondenzator je linearan ako je za svaki trenutak vremena t funkcija f linearna, tako da se može pisati:

$$q(t) = C(t)v(t)$$

Linearni vremenski nepromjenljivi (LVN) kondenzatori imaju qv karakteristiku u obliku pravca, koji prolazi kroz ishodište qv koordinatnog sistema, kao što je prikazano na slici 4.2. Dakle, za LVN kondenzatore jednačina stanja ima oblik:

$$q(t) = f(v) = Cv(t) \tag{4.3}$$

Pošto izmedju naelektrisanja $q(t)$ i struje $i(t)$ vrijedi relacija:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \tag{4.4}$$

za LVN kondenzatore vrijedi:

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} \tag{4.5}$$

Konstantan koeficijent C naziva se kapacitet kondenzatora i odredjuje nagib pravca $q(t)\!=\!Cv(t)$ u qv ravni, kao što je označeno na slici 4.2.

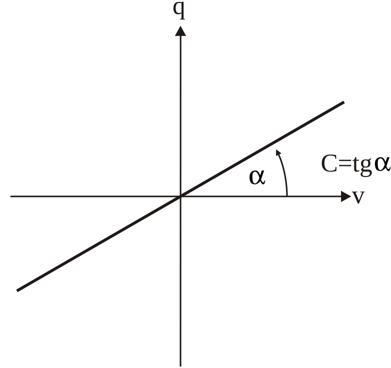


Figure 4.2: qv karakteristika LVN kondenzatora

U opštem slučaju kapacitet kondenzatora predstavlja kvantitavnu karakteristiku, koja se definiše izrazom:

$$C(v,q,t) = \frac{\partial q}{\partial v}$$

Integracijom jednačine 4.5 slijedi:

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\ d\tau = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t_0} i(\tau)\ d\tau + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)\ d\tau \\ &= v(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)\ d\tau \end{aligned} \tag{4.6}$$

Iz jednačine 4.6 slijedi da je stanje LVN kondenzatora za $t \geq t_0$ jednoznačno odredjeno sa početnom vrijednošću napona kondenzatora $v(t_0) = V_0$ i analitičkim izrazom promjene struje $i(t)$ za $t \geq t_0$. Važno je uočiti da je funkcija $i = f(v)$ u jednačini 4.5, za signal $i(t)$ definisan na intervalu $(-\infty, t]$, linerana funkcija, pošto je operator diferenciranja linearan operator. Premda je i integralenje linearan operator funkcija $v = g(i)$ u izrazu 4.6 nije linearna za $v(t_0) \neq 0$.

Iz izraza 4.6 slijedi da je "istorijat" promjene stanja kondenzatora za $t \leq t_0$ jednoznačno odredjen početnom vrijednošću napona $v(t_0) = V_0$. Takodje, iz relacije 4.6 vidi se da je promjena napona $v(t)$, za $t \geq t_0$, zavisna od početne vrijednosti V_0. Ova osobina kondenzatora, koja ukazuje na uticaj "istorijata" promjene varijable stanja $i(t)$ u intervalu $t \leq t_0$, na promjenu varijable stanja $v(t)$ za interval $t \geq t_0$, naziva se osobina memorisanja. Integral $\int_{-\infty}^{t} i(\tau) d\tau$ grafički predstavlja površinu ispod krive $i(t)$, odnosno količinu naelektrisanja $q(t) = \int_{-\infty}^{t} i(\tau) d\tau$, koja je nagomilana na kondenzatoru u trenutku t. To znači da se i početna vrijednost naelektrisanja za $t = t_0$:

$$Q_0 = q(t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} i(\tau)\ d\tau \tag{4.7}$$

može koristiti za predstavljanje "istorijata" promjene stanja kondenzatora za interval $t \leq t_0$. Dakle, kondenzator je element kola koji ima sposobnost akumuliranja

naelektrisanja. Akumuliranje naelektrisanja na kondenzatoru ukazuje na akumuliranje elektrostatičke energije. Prema tome, kondenzator je element koji može da akumulira energiju, po čemu se razlikuje od otpornika. Energije $W_{e0} \geq 0$, koja je akumulirana (zatečena) u LVN kondenzatoru u trenutku t_0, iznosi:

$$w_e(t_0) = W_{e0} = \frac{1}{2}\,\frac{Q_0^2}{C} = \frac{1}{2}\,CV_0^2 \tag{4.8}$$

S druge strane, energija koje je predata kondenzatoru do trenutka t_0 jednaka je integralu snage koja se predaje kondenzatoru $p(t) = v(t)i(t)$ u intervalu $-\infty < t' \leq t_0$, odnosno za LVN kondenzatore vrijedi:

$$w(t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} v(t)i(t)\;dt = \int_{v(-\infty)}^{v(t_0)} Cv(t)\;dv = \frac{1}{2}\;CV_0^2 = \frac{1}{2}\;\frac{Q_0^2}{C} \tag{4.9}$$

Prema tome vrijedi $w_e(t_0) = w(t_0)$. Dakle, LVN kondenzator je element kod koga se sva energija($w(t_0)$), koja se predaje elementu do trenutka t_0, pretvara u akumuliranu elektrostatičku energiju unutar elementa ($w_e(t_0)$).

Za definisanje stanja električnih kola uobičajeno se kao varijable stanja koriste naponi i struje elemenata. To znači da je poželjno da se "istorijat" stanja kondenzatora izražava pomoću napona V_0. Ovo je moguće ukoliko je $i(t)$ ograničena funkcija za sve vrijednosti t, odnosno ukoliko postoji konačna konstanta M tako da vrijedi $|i(t)| \leq M$ za svako t. Tada je napon kondenzatora $v(t)$ neprekidna funkcija vremena, te se početna vrijednost napona V_0 može koristiti za prikazivanje akumulirane energije u kondenzatoru u trenutku $t = t_0$. Sa energetskog aspekta neprekidnost napona $v(t)$ ukazuje da se i akumulirana energija kondenzatora ne može trenutno mijenjati. Dakle,' osobina kondenzatora je da se suprostavlja trenutnoj promjeni energetskog stanja, po čemu se razlikuje od otpornika. Elementi koji imaju osobinu suprostavljanja trenutnoj promjeni energije koja se predaje elementu nazivaju se dinamički elementi. Prema tome, kondenzator, za razliku od otpornika, pripada klasi dinamičkih elemenata.

Kod linearnih, vremenski promjenljivih kondenzatora qv karakteristika je pravac koji prolazi kroz ishodište qv koordinatnog sistema, čiji nagib $C(t)$ zavisi od vremena t, tako da je matematički model VP kondenzatora opisan relacijom:

$$q(t) = C(t)v(t) \tag{4.10}$$

Struja kroz VP kondenzator odredjena je jednačinom:

$$i(t) = C(t)\frac{dv}{dt} + \frac{dC}{dt}v(t) \tag{4.11}$$

Kao i linearni vremenski promjenljiv otpornik i kondenzator kod koga se kapacitet mijenja prema sinusnoj funkciji frekvencije f_1, prema relaciji:

$$C(t) = C_0 + C_m \cos 2\pi f_1$$

za slučaj priključenja na generator sinusnog pobudnog signala frekvencije f, posjeduje osobinu modulacije signala.

Energija koja je u trenutku t akumulirana u LVP kondenzatorima ima vrijednost:

$$w_e(t) = \frac{1}{2}C(t)v^2(t) \tag{4.12}$$

Odatle je brzina promjene akumulirane energije:

$$p_e(t) = \frac{dw_e(t)}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dC(t)}{dt}v^2(t) + C(t)v(t)\frac{dv(t)}{dt} \tag{4.13}$$

Snaga koja se u svakom trenutku predaje LVP kondenzatoru $p(t)$ ima vrijednost:

$$\begin{aligned} p(t) &= v(t)i(t) = v(t)\frac{d}{dt}\left[C(t)v(t)\right] = v(t)\left[C(t)\frac{dv(t)}{dt} + \frac{dC(t)}{dt}v(t)\right] \\ &= C(t)v(t)\frac{dv(t)}{dt} + \frac{dC(t)}{dt}v^2(t) \end{aligned} \tag{4.14}$$

Dakle, LVP kondenzator prima energiju brzinom $p(t)$ i akumulira energiju brzinom $p_e(t)$. Razlika izmedju snage koja se predaje elementu $p(t)$ i snage koja se transformiše u akumuliranu energiju $p_e(t)$ jednaka je:

$$p(t) - p_e(t) = p_m(t) = \frac{1}{2}\frac{dC(t)}{dt}v^2(t) \tag{4.15}$$

Ova snaga predstavlja mehanički rad elektrostatičkih sila kondenzatora, koji uzrokuje promjenu kapaciteta $C(t)$. Prema tome snagu koja se predaje kondenzatoru $p(t)$ možemo izraziti jednačinom:

$$p(t) = p_e(t) + p_m(t) = \frac{dw_e(t)}{dt} + \frac{1}{2}\frac{dC(t)}{dt}v^2(t) \tag{4.16}$$

Energija koja se u intervalu (t_0, t) predaje LVP kondenzatoru izračunava se prema relacijama:

$$\begin{aligned} w(t_0, t) &= \int_{t_0}^{t} p(\tau)d\tau = \int_{t_0}^{t} p_e(\tau)d\tau + \int_{t_0}^{t} p_m(\tau)d\tau \\ &= \int_{t_0}^{t} \frac{dw_e(\tau)}{d\tau}d\tau + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} v^2(\tau)\frac{dC(\tau)}{d\tau}d\tau \\ &= w_e(\tau)\Big|_{t_0}^{t} + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} v^2(\tau)\dot{C}(\tau)d\tau \\ &= w_e(t) - w_e(t_0) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} v^2(\tau)\dot{C}(\tau)d\tau \end{aligned} \tag{4.17}$$

4.1.1 Generator početnog stanja kondenzatora

LVN kondenzator, čija je početna vrijednost napona $v(t_0)=V_0$, moguće je za vremenski period $t \geq t_0$ predstaviti pomoću modela ekvivalentnog kola prikazanog na slici 4.3.

Ekvivalentno kolo, kojim se modeluje početno stanje kondenzatora, čini redna veza kondenzatora kapaciteta C, koji u $t=t_0$ nema akumulirane energije, odnosno za koji vrijedi $v_C(t_0)=0$ i nezavisni, ekvivalentni naponski generator konstantne vrijednosti napona $v_g(t)=V_0 u(t-t_0)$. Ekvivalentni generator, koji predstavlja uticaj akumulirane energije $W_{C0}=\frac{1}{2}CV_0^2$ na odziv kola za $t \geq t_0$, naziva se generator početnog stanja.

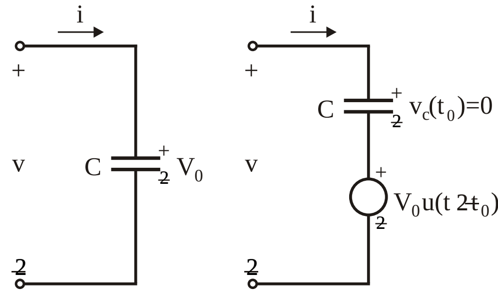


Figure 4.3: Generator početnog stanja kondenzatora $v_g(t)=V_0 u(t-t_0)$

4.1.2 Vezivanje kondenzatora

Redna veza n LVN kondenzatora, koji su opisani vi karakteristikama:

$$\begin{aligned} i_k(t) &= C_k \frac{dv_k(t)}{dt} \\ v_k(t) &= v_k(0) + \frac{1}{C_k}\int_0^t i_k(\tau)d\tau \end{aligned}$$

prikazana je na slici 4.4.

Za rednu vezu kondenzatora jednačine prema Kirhofovim zakonima imaju oblik:

prema KZS: $i_k(t)=i(t)$, za $k=1,2,...,n$

prema KZN: $v(t)=\sum_{k=1}^{n} v_k(t)$

Odatle, za $t=0$ slijedi:

$$v(0) = \sum_{k=1}^{n} v_k(0)$$

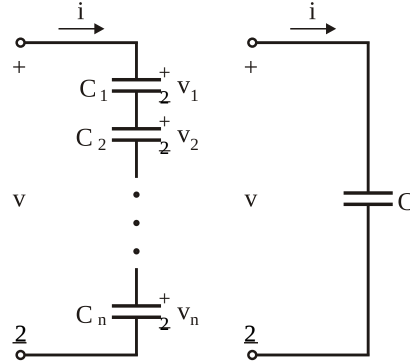


Figure 4.4: Redna veza n LVN kondenzatora

Tada, za rednu vezu vrijedi:

$$\begin{aligned} v(t) &= \sum_{k=1}^{n} v_k(t) = \sum_{k=1}^{n} [v_k(0) + \frac{1}{C_k}\int_0^t i_k(\tau)d\tau] \\ &= \sum_{k=1}^{n} v_k(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{C_k}\int_0^t i(\tau)d\tau = v(0) + \int_0^t i(\tau)d\tau \left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{C_k}\right] \\ &= v(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau \end{aligned}$$

gdje je:

$$\frac{1}{C} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{C_k}$$

Prema tome, n redno vezanih LVN kondenzatora sa početnim vrijednostima napona $v_k(0)$ može se ekvivalentno predstaviti LVN kondenzatorom C pri čemu vrijedi:

$$\frac{1}{C} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{C_k} \quad (4.18)$$

$$v(0) = \sum_{k=1}^{n} v_k(0) \quad (4.19)$$

Ukoliko umjesto kapaciteta C_k koristimo elastance $S_k = 1/C_k$ vrijedi:

$$S = \sum_{k=1}^{n} S_k \quad (4.20)$$

Paralelna veza n LVN kondenzatora, koji je prikazana je na slici 4.5., definisana je samo za slučaj jednakih početnih vrijednosti napona:

$$v(0) = v_1(0) = \cdots = v_k(0) = \cdots = v_n(0)$$

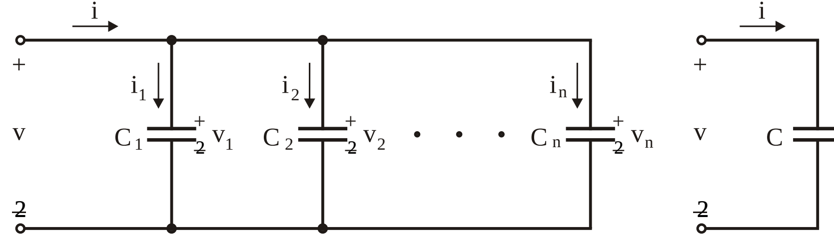


Figure 4.5: Paralelna veza LVN kondenzatora

Paralelna veza kondenzatora opisana je jednačinama prema Kirhofovim zakonima:

prema KZS: $i(t)=\sum_{k=1}^{n} i_k(t)$

prema KZN: $v(0)=v_k(0)$, za $k=1,2,...n$

Odavde slijedi:

$$i(t) = \sum_{k=1}^{n} i_k(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k \frac{dv_k}{dt} = \sum_{k=1}^{n} C_k \frac{dv}{dt} = C\frac{dv}{dt}$$

gdje je:

$$C = \sum_{k=1}^{n} C_k$$

Prema tome n paralelno vezanih LVN kondenzatora sa istim početnim vrijednostima napona $v_k(0)$ može se ekvivalentno predstaviti LVN kondenzatorom C pri čemu vrijedi:

$$C = \sum_{k=1}^{n} C_k \tag{4.21}$$

$$v(0) = v_k(0) \tag{4.22}$$

U obje veze (rednoj i paralelnoj) ukupna količina naelektrisanja u polaznom i ekvivalentnom kolu mora biti ista, odnosno vrijede relacije:

$$q(t) = \sum_{k=1}^{n} q_k(t)$$

$$Cv(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k v_k(t)$$

Prethodne relacije izražavaju zakon o konzervaciji ukupnog naelektrisanja u ekvivalentnom kolu.

4.1.3 Ekvivalentno Tevenenovo i Nortonovo kolo

Za kola koja sadrže LVN kondenzatore i generatore proizvoljnog oblika signala moguće je definisati ekvivalentno Tevenenovo i Nortonovo kolo. Ukoliko kondenzatori imaju početne vrijednosti napona $v_k(0)$ tada za slučaj paralelnog vezivanja kondenzatora moraju biti ispunjeni uslovi regularnosti paralelne veze. Na slici 4.6. prikazani su Tevenenovo i Nortonovo ekvivalentno kolo.

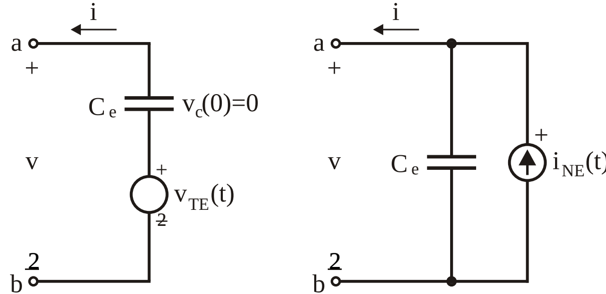


Figure 4.6: Tevenenov i Nortonov generator kola koje sadrži LVN kondenzatore

Napon $v_{TE}(t)$ predstavlja napon $v_0(t)$ pri otpojenim krajevima $a-b$ (za $i(t)=0$). Oblik ovog napona zavisi od oblika pobudnih signala. Struja $i_{NE}(t)$ predstavlja struju $i_k(t)$ pri kratko spojenim krajevima $a-b$ (za $v(t)=0$). Pri tome vrijedi:

$$i_{NE}(t) = C_e \frac{d}{dt}\left[v_{TE}(t)\right] \tag{4.23}$$

$$v_{TE}(t) = \frac{1}{C_e}\int_{-\infty}^{t} i_{NE}(\tau)\,d\tau = v_{TE}(0) + \frac{1}{C_e}\int_{0}^{t} i_{NE}(\tau)\,d\tau \tag{4.24}$$

Ekvivalentni kapacitet C_e izračunava se prema pravilima za vezivanje kapaciteta u kolu u kome su svi generatori eliminisani.

Na osnovu ekvivalencije Tevenenovog i Nortonovog kola, početno stanje LVN kondenzatora za $t_0 = 0$, možemo prikazati pomoću kola koje sadrži strujni generator početnog stanja $i_g(t)$, kao što je prikazano na slici 4.7.

Na osnovu jednačine 4.23 za slučaj $v(0)=V_0 u(t)$ slijedi:

$$i_g(t) = C\frac{dv(t)}{dt} = C\frac{d}{dt}[V_0 u(t)] = CV_0\frac{d}{dt}u(t) = CV_0\delta(t)$$

Dakle, ekvivalentni strujni generator početnog stanja kondenzatora ima karakter impulsnog generatora, čiji je intenzitet impulsa jednak $Q_0 = CV_0$.

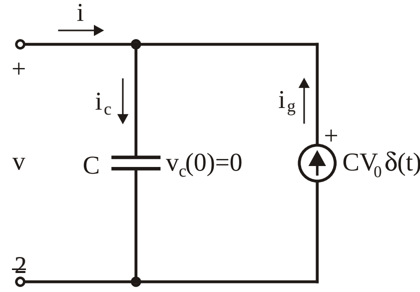


Figure 4.7: Generator početnog stanja $i_g(t) = CV_0\delta(t)$

4.1.4 Snaga, energija i pasivnost kondenzatora

Stanje vremenski nepromjenljivog (VN) nelinearnog kondenzatora, definisano je qv karakteristikom $v = \hat{v}(q)$ koja je prikazana na slici 4.8.

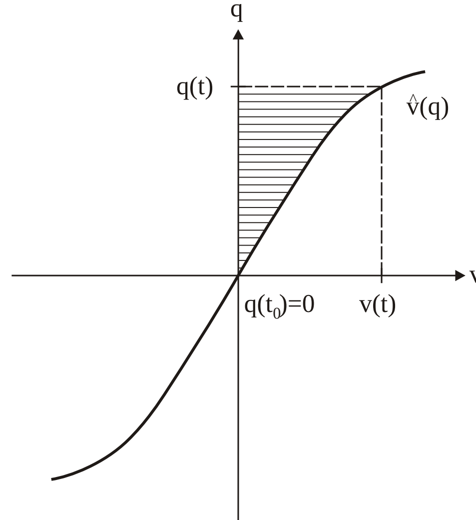


Figure 4.8: Grafička interpretacija akumulirane energije u VN kondenzatoru

Izmedju varijabli stanja pristupa $v(t)$ i $i(t)$ i naelektrisanja $q(t)$ vrijede relacije:

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{dq}{dt} \\ v(t) &= \hat{v}(q) \end{aligned}$$

Energija koja se predaje kondenzatoru u intervalu (t_0, t) tada se izračunava pomoću relacije:

$$w(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} v(\tau) i(\tau)\, d\tau = \int_{q(t_0)}^{q(t)} \hat{v}(q_1)\, dq_1$$

Pretpostavimo da je kondenzator u trenutku $t=t_0$ u stanju "mirovanja", odnosno da je $q(t_0)=0$. To znači da u trenutku t_0 nema akumulirane energije u električnom polju kondenzatora, odnosno da je kondenzator prazan. Tada je energija koja se akumulira u kondenzatoru u intervalu (t_0, t) jednaka je energiji koja se predaje na njegovom pristupu, odnosno vrijedi:

$$w_e(t) = w(t_0, t) = \int_0^{q(t)} \hat{v}(q_1)\, dq_1$$

Osjenčena površina iznad qv karakteristike, odnosno izmedju $\hat{v}(q)$ krive i q ose, ima vrijednost integrala $\int_0^q \hat{v}(q_1)\, dq_1$ i za usaglašene smjerove varijabli stanja grafički predstavlja akumuliranu energiju u kondenzatoru. Za qv karakteristiku prikazanu na slici 4.8., koja prolazi kroz I i III kvadrant (uključujući v i q osu), akumulirana energija je nenegativna. VN kondenzator kod koga je u svakom trenutku t akumulirana energija nenegativna, pripada klasi pasivnih elemenata. Kondenzator je aktivan, ukoliko nije pasivan. Prema tome, tačka u prostoru stanja (v, q) u potpunosti definiše energetsko stanje VN kondenzatora.

Ukoliko je $q(t_0) = Q_0 \neq 0$ u trenutku t_0 kondenzator ima zatečenu vrijednost akumulirane energije $w_e(t_0)$. Tada je energija koja se predaje kondenzatoru u intervalu (t_0, t) definisana relacijom:

$$w(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} v(\tau)i(\tau)\, d\tau = \int_{q(t_0)}^{q(t)} \hat{v}(q_1)\, dq_1 = w_e(t) - w_e(t_0)$$

Energija $w(t_0, t)$, koja se predaje kondenzatoru u intervalu (t_0, t), grafički predstavlja površinu koja je omedjena sa $\hat{v}(q)$ krivom, q osom i pravcima $q=Q_0$ i $q=q(t)$, kao što je prikazano na slici 4.9.

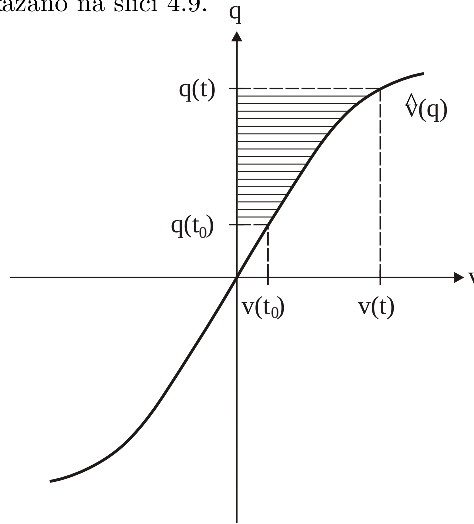


Figure 4.9: Grafička interpretacija akumulirane energije NVN kondenzatora (za $q(t_0) \neq 0$)

Ukoliko je $q(t_0) > q(t)$ energija koja je akumulirana u kondenzatoru u trenutku t_0 veća je od energije koja je akumulirana u trenutku t odnosno kondenzator je u intervalu (t_0, t) vraćao energiju u kolo. To još uvijek ne znači da je kondenzator aktivni element. Za ovaj slučaj $(Q_0 \neq 0)$ uslov pasivnosti VN kondenzatora izražen je relacijom:

$$w_e(t) = [w(t_0, t) + w_e(t_0)] \geq 0, \quad \text{za svako } t_0 \text{ i za } t \geq t_0$$

Prema ovoj proširenoj definiciji, uslov pasivnosti VN kondenzatora glasi:

Suma zatečene akumulirane energije u trenutku t_0 ($w_e(t_0)$) i energije koja se preda kondenzatoru u intervalu (t_0, t) ($w(t_0, t)$) mora biti nenegativna vrijednost.

Za LVN kondenzator vrijedi:

$$q(t) = Cv(t)$$

odnosno njegova qv karakteristika predstavljena je pravcem u qv koordinatnom sistemu, koji prolazi kroz ishodište. Odavde, za $q(t_0) = 0$ slijedi:

$$w_e(t) = \int_0^{q(t)} \frac{q_1}{C}\, dq_1 = \frac{1}{2}\, \frac{q^2(t)}{C} = \frac{1}{2}\, Cv^2(t) \tag{4.25}$$

Zbog kvadrata naelektrisanja $q^2(t)$ smjer naelektrisanja ne utiče na iznos akumulirane energije. Uslov pasivnosti LVN kondenzatora tada je definisan relacijom:

$$w_e(t) = w(t_0, t) + w_e(t_0) = \frac{1}{2}\, \frac{q^2(t)}{C} \geq 0, \quad \text{za svako } t_0 \text{ i za } t \geq t_0 \tag{4.26}$$

Iz uslova pasivnosti kondenzatora slijedi da je LVN kondenzator pasivan za $C \geq 0$ odnosno aktivan za $C < 0$. Modelom aktivnog LVN kondenzatora predstavlja se kondenzator koji akumulira negativnu elektrostatičku energiju, odnosno ima sposobnot razmjene energije izvan kola, što nije osobina koju posjeduju realne fizičke komponente.

Za linearni vremenski promjenljiv kondenzator, prema relaciji 4.17 vrijedi:

$$\begin{aligned}
w(t_0, t) &= \int_{t_0}^{t} p(\tau)\, d\tau = \int_{t_0}^{t} p_e(\tau)\, d\tau + \int_{t_0}^{t} p_m(\tau)\, d\tau \\
&= \int_{t_0}^{t} \frac{dw_e(\tau)}{d\tau}\, d\tau \;+\; \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t} v^2(\tau)\, \frac{dC(\tau)}{d\tau}\, d\tau \\
&= w_e(\tau)\Big|_{t_0}^{t} \;+\; \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t} v^2(\tau)\, \dot{C}(\tau)\, d\tau \\
&= w_e(t) - w_e(t_0) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t} v^2(\tau)\, \dot{C}(\tau)\, d\tau
\end{aligned}$$

odakle, uvažavajući relaciju 4.25 slijedi:

$$w(t_0, t) + w_e(t_0) = \frac{1}{2}\, C(t)v^2(t) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t} v^2(\tau)\dot{C}(\tau)\, d\tau$$

Tada se uslov pasivnosti LVP kondenzatora definiše relacijom:

$$w(t_0, t) + w_e(t_0) \geq 0$$

Odatle slijedi:

$$\frac{1}{2}\ C(t)v^2(t) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} v^2(\tau)\ \dot{C}(\tau)\ d\tau \geq 0$$

Prethodni uslov mora biti ispunjen za svako t i svaku vrijednost $v(t)$. Iz uslova pasivnosti izvodimo zaključak da je LVP kondenzator pasivan ukoliko za svako t vrijedi:

$$\begin{aligned} C(t) &\geq 0 \\ \dot{C}(t) &\geq 0 \end{aligned}$$

Do istog zaključka možemo doći polazeći od jednačine LVP kondenzatora:

$$q(t) = C(t)v(t)$$

odakle slijedi:

$$i(t) \ = \ \frac{dq(t)}{dt} = \frac{d}{dt}[C(t)v(t)] \ = \ C(t)\ \frac{dv(t)}{dt} + \dot{C}(t)\ v(t)$$

Na osnovu prethodne jednačine LVP kondenzator možemo posmatrati kao rednu vezu LVN kondenzatora, čiji je kapacitet $C(t)$ i LVP otpornika čija je provodnost $\dot{C}(t)$. Uslov pasivnosti LVN kondenzatora zahtijeva da je $C(t)\geq 0$ a uslov pasivnosti otpornika da je $\dot{C}(t)\geq 0$.

4.2 Zavojnica - dinamički induktivni element

Fizička komponenta koja ima sposobnost da akumulira energiju u magnetnom polju predstavlja se u električnom kolu modelom idealne zavojnice. Idealna zavojnica je element kola sa dva kraja, kod koga je odnos magnetnog fluksa $\phi(t)$ i struje kroz induktor $i(t)$ jednoznačno definisan u svakom trenutku vremena t algebarskom zavisnošću $\phi(t)=f(i,t)$, koja se naziva ϕi karakteristikom. Zavojnica kao model opisuje pojavu samoindukcije. Na slici 4.10. prikazan je grafički simbol i odgovarajuća karakteristika nelinearnog zavojnice, koja je simetrična u odnosu na koordinatni početak.

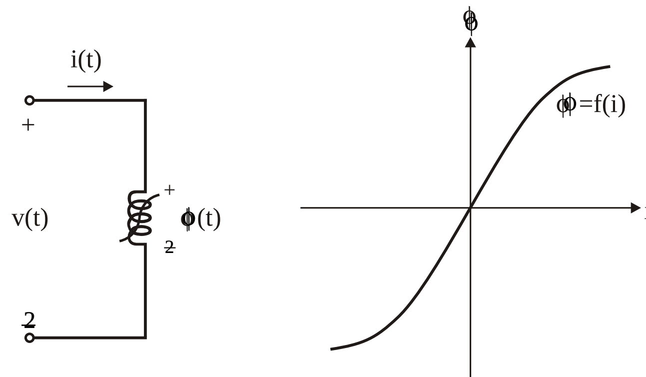


Figure 4.10: Grafički simbol i ϕi karakteristika nelinearne zavojnice

U zavisnosti od osobina ϕi karakteristike modeli zavojnice se klasifikuju kao:

- linearne (L)
- nelinearne (N)
- vremenski nepromjenljive (VN)
- vremenski promjenljivi (VP)

Imedju ukupnog ulančenog fluksa $\phi(t)$ i napona $v(t)$, za usaglašene referentne smjerove prikazane na slici 4.10., prema Faradejevom zakonu vrijedi relacija:

$$v(t) = \frac{d\phi(t)}{dt} \tag{4.27}$$

Linearne, vremenski nepromjenljive zavojnice imaju ϕi karakteristiku u obliku pravca, koji prolazi kroz koordinatni početak u $i{-}\phi$ ravni, kao što je prikazano na slici 4.11.

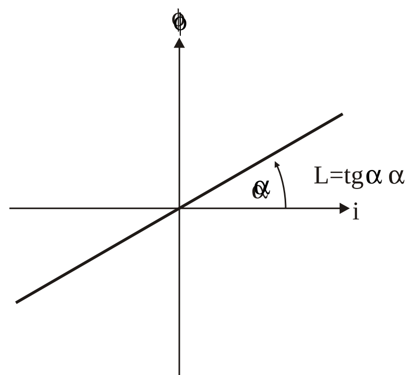


Figure 4.11: ϕi karakteristika LVN induktora

Za LVN induktore vrijedi:

$$\phi(t) = Li(t) \tag{4.28}$$

odnosno:

$$v(t) = \frac{d\phi(t)}{dt} = L\frac{di(t)}{dt} \tag{4.29}$$

Koeficijent L naziva se induktivitet zavojnice i definiše nagib pravca $\phi = Li$. Integracijom jednačine 4.29 slijedi:

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v(\tau)\ d\tau = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t_0} v(\tau)\ d\tau + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(\tau)\ d\tau \\ &= i(t_0) + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(\tau)\ d\tau \end{aligned} \tag{4.30}$$

Analogno, kao kod kondenzatora, stanje zavojnice (struja $i(t)$ za $t \geq t_0$) jednoznačno je odredjeno početnom vrijednošću struje $i(t_0)$ i analitičkim izrazom za napon $v(t)$, definisanim za $t \geq t_0$. Dakle, istorijat promjene stanja zavojnice jednoznačno je odredjujen početnom vrijednošću struje $i(t_0)$. Prema tome zavojnice, kao i kondenzatori, imaju sposobnost memorisanja, odnosno pripadaju klasi dinamičkih elemenata. Integral $\int_{-\infty}^{t} v(\tau) d\tau$ predstavlja površinu ispod krive $v(t)$, odnosno vrijednost fluksa $\phi(t)$, koja odredjuje akumuliranu energiju u magnetnom polju zavojnice u trenutku t. Dakle, početna vrijednost fluksa za $t = t_0$:

$$\Phi_0 \ = \ \phi(t_0) \ = \ \int_{-\infty}^{t_0} v(\tau)\, d\tau \tag{4.31}$$

može se koristiti za predstavljanje početnog energetskog stanja zavojnice u trenutku $t = t_0$.

Energija $W_{m0} \geq 0$, koja je akumulirana u LVN zavojnici u trenutku t_0,iznosi:

$$W_{m0} \ = \ w_m(t_0) \ = \ \frac{1}{2}\ \frac{\Phi_0^2}{L} \ = \ \frac{1}{2}\ LI_0^2 \tag{4.32}$$

S druge strane, energija koje je predata zavojnici do trenutka t_0 jednaka je integralu snage koja se predaje zavojnici $p(t) = v(t)i(t)$ u intervalu $-\infty < t < t_0$, odnosno za LVN zavojnice vrijedi:

$$\begin{aligned} w(t_0) &= \int_{-\infty}^{t_0} v(t)i(t)\ dt = \int_{i(-\infty)}^{i(t_0)} Li(t)\ di \\ &= \frac{1}{2}\ LI_0^2 \ = \ \frac{1}{2}\ \frac{\Phi_0^2}{C} \end{aligned} \tag{4.33}$$

Prema tome vrijedi $w_m(t_0) = w(t_0)$. Dakle, LVN zavojnica je element kod koga se sva energija $(w(t_0))$, koja se predaje elementu do trenutka t_0, pretvara u akumuliranu energiju unutar elementa $(w_m(t_0))$.

Ukoliko je $v(t)$ ograničena funkcija, struja zavojnice $i(t)$ je neprekidna funkcija. Tada se početno stanje, odnosno zatečena akumulirana energija zavojnice, može

predstaviti pomoću početne vrijednosti struje I_0. Neprekidnost struje $i(t)$ ukazuje da se energija akumulirana u magnetskom polju ne može trenutno mijenjati, što je osobina dinamičkih elemenata.

Kod linearnih, vremenski zavisnih (LVP) zavojnica ϕi karakteristika je pravac koji prolazi kroz koordinatni početak, pri čemu nagib pravca zavisi od vremena t, odnosno induktivitet $L(t)$ je funkcija vremena t. Jednačine stanja vremenski zavisnog induktora su:

$$\phi(t) = L(t)i(t) \tag{4.34}$$

$$v(t) = \frac{d\phi(t)}{dt} = L(t)\frac{di}{dt} + \frac{dL}{dt}\ i(t) \tag{4.35}$$

Energija koja je u trenutku t akumulirana u LVP zavojnici ima vrijednost:

$$w_m(t) = \frac{1}{2}\ L(t)i^2(t) \tag{4.36}$$

Odatle je brzina promjene akumulirane energije LVP zavojnice:

$$p_e(t) = \frac{dw_m(t)}{dt} = \frac{1}{2}\ \frac{dL(t)}{dt}\ i^2(t) + L(t)i(t)\ \frac{di(t)}{dt}$$

Tada snaga koja se u svakom trenutku predaje LVP zavojnici $p(t)$ ima vrijednost:

$$\begin{aligned} p(t) &= v(t)i(t) = i(t)\frac{d}{dt}[L(t)i(t)] = i(t)[L(t)\frac{di(t)}{dt} + \frac{dL(t)}{dt}i(t)] \\ &= L(t)i(t)\frac{di(t)}{dt} + \frac{dL(t)}{dt}i^2(t) \end{aligned} \tag{4.37}$$

Prema tome, LVP induktor prima energiju brzinom $p(t)$ i akumulira energiju brzinom $p_e(t)$. Razlika izmedju snage koja se predaje elementu $p(t)$ i snage koja se transformiše u akumuliranu energiju $p_e(t)$ jednaka je:

$$p(t) - p_e(t) = p_m(t) = \frac{1}{2}\ \frac{dL(t)}{dt}\ i^2(t)$$

Ova snaga predstavlja mehanički rad sila koje uzrokuje promjenu induktiviteta $L(t)$. Prema tome, snagu koja se predaje induktoru $p(t)$ možemo izraziti jednačinom:

$$p(t) = p_e(t) + p_m(t) = \frac{dw_m(t)}{dt} + \frac{1}{2}\ \frac{dL(t)}{dt}\ i^2(t) \tag{4.38}$$

Energija koja se u intervalu (t_0, t) predaje LVP induktoru tada se izračunava prema relacijama:

$$\begin{aligned} w(t_0, t) &= \int_{t_0}^{t} p(\tau)\ d\tau = \int_{t_0}^{t} p_e(\tau)\ d\tau + \int_{t_0}^{t} p_m(\tau)\ d\tau \\ &= \int_{t_0}^{t} \frac{dw_m(\tau)}{d\tau}\ d\tau + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} i^2(\tau)\frac{dL(\tau)}{d\tau}\ d\tau \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= w_m(\tau)|_{t_0}^{t} + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} i^2(\tau)\dot{L}(\tau)\, d\tau \\
&= w_m(t) - w_m(t_0) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} i^2(\tau)\dot{L}(\tau)\, d\tau \qquad (4.39)
\end{aligned}
$$

4.2.1 Generator početnog stanja zavojnice

Za predstavljanje LVN zavojnica, čija je početna vrijednost struje $i(t_0)=I_0$, može se koristi ekvivalentni model prikazan na slici 4.12.

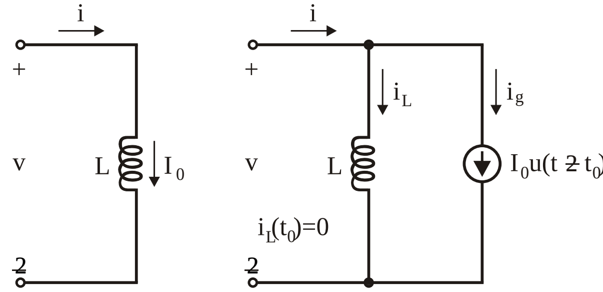


Figure 4.12: Generator početnog stanja zavojnice $i_g(t)=I_0 u(t)$

Ekvivalentno kolo prikazano na slici 4.12. čini paralelna veza zavojnice L, koja u trenutku $t=t_0$ nema akumulirane energije, tj. $i_L(t_0)=0$, i nezavisni strujni generator konstantne vrijednosti struje I_0. Strujni generator predstavlja uticaj akumulirane energije $W_{m0}=LI_0^2$, odnosno početnog energetskog stanja zavojnice.

4.2.2 Vezivanje zavojnica

Redna veza n LVN zavojnica, koje su opisane vi karakteristikama:

$$
\begin{aligned}
v_k(t) &= L_k\, \frac{i_k(t)}{dt} \\
i_k(t) &= i_k(0) + \frac{1}{L_k}\int_0^t v_k(\tau)\, d\tau
\end{aligned}
$$

prikazana je na slici 4.13.

Redna veza zavojnica opisana je jednačinama prema Kirhofovim zakonima:

prema KZS: $i_k(t)=i(t)$ za $k=1,2,\dots,n$ odakle za $t=0$ vrijedi:

$$i(0) = i_1(0) = \cdots = i_k(0) = \cdots = i_n(0)$$

prema KZN: $v(t)=\sum_{k=1}^{n} v_k(t)$

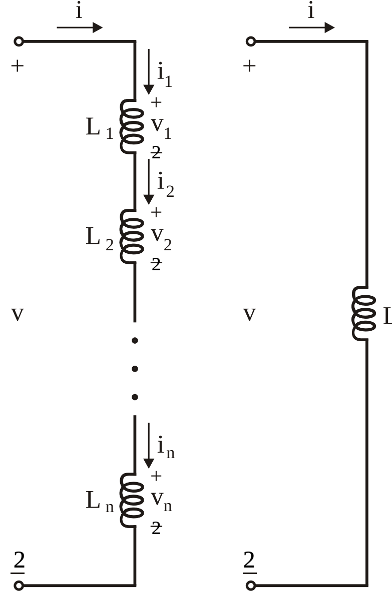


Figure 4.13: Redna veza LVN zavojnica

Dakle, redna veza zavojnica može se definisati samo ukoliko su početne vrijednosti struja $i_k(0)$ svih n redno vezanih zavojnica jednake.

Iz jednačina prema Kirhofovim zakonima slijedi:

$$\begin{aligned} v(t) &= \sum_{k=1}^{n} v_k(t) = \sum_{k=1}^{n} L_k \frac{di_k(t)}{dt} = \sum_{k=1}^{n} L_k \frac{di(t)}{dt} \\ &= \frac{di(t)}{dt} \sum_{k=1}^{n} L_k = L \frac{di(t)}{dt} \end{aligned}$$

gdje je:

$$L = \sum_{k=1}^{n} L_k$$

Prema tome, n redno vezanih LVN zavojniva sa istim početnim vrijednostima struja $i_k(0)=i(0)$ (za $k=1,2,\cdots,n$) može se predstaviti ekvivalentnom LVN zavojnicom L pri čemu vrijedi:

$$L = \sum_{k=1}^{n} L_k \quad (4.40)$$

$$i(0) = i_k(0) \quad (4.41)$$

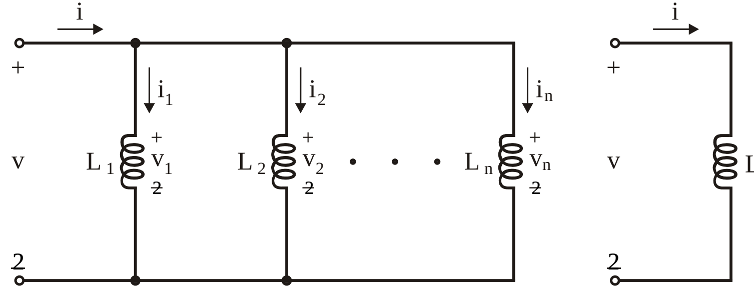


Figure 4.14: Paralelna veza LVN zavojnica

Paralelna veza n LVN zavojnica, koji je prikazana je na slici 4.14.

Paralelna veza zavojnica opisana je jednačinama prema Kirhofovim zakonima:

prema KZS: $i(t)=\sum_{k=1}^{n} i_k(t)$, odnosno za $t=0$: $i(0)=\sum_{k=1}^{n} i_k(0)$

prema KZN: $v(t)=v_k(t)$, za $k=1,2,\ldots,n$

Odavde slijedi:

$$\begin{aligned}
i(t) &= \sum_{k=1}^{n} i_k(t) = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{L_k}\int_{-\infty}^{t} v_k(\tau)\, d\tau\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{L_k}\int_{-\infty}^{t_0} v_k(\tau)\, d\tau + \frac{1}{L_k}\int_{t_0}^{t} v_k(\tau)\, d\tau\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} i_k(0) + \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{L_k}\int_{0}^{t} v(\tau)\, d\tau\right] \\
&= i(0) + \int_0^t v(\tau)\, d\tau \left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{L_k}\right] = i(0) + \frac{1}{L}\int_0^t v(\tau)\, d\tau
\end{aligned}$$

odakle je:

$$\frac{1}{L} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{L_k}$$

Uvodeći umjesto induktiviteta L_k, recipročne induktivitete $\Gamma_k = 1/L_k$ za paralelnu vezu zavojnica možemo pisati:

$$\Gamma = \sum_{k=1}^{n}\Gamma_k$$

Prema tome, n paralelno vezanih LVN zavojnica sa početnim vrijednostima struja $i_k(0)$ može se predstaviti pomoću ekvivalentne LVN zavojnice L pri čemu vrijedi:

$$L = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{L_k} \tag{4.42}$$

$$\Gamma = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_k \tag{4.43}$$

$$i(0) = \sum_{k=1}^{n} i_k(0) \tag{4.44}$$

Analogno sa zakonom o održanju ukupnog naelektrisanja u kolu koje sadrži kondenzatore, za obje veze zavojnica vrijedi zakon o održanju (konzervaciji) ukupnog fluksa kola, izražen relacijom:

$$\Phi = Li = \sum_{k=1}^{n} L_k i_k = \sum_{k=1}^{n} \Phi_k$$

4.2.3 Ekvivalentno Tevenenovo i Nortonovo kolo

Za kola koja sadrže LVN zavojnice i generatore proizvoljnog oblika signala moguće je definisati ekvivalentno Tevenenovo i Nortonovo kolo. Ukoliko zavojnice imaju početne vrijednosti struja $i_k(0)$ tada za slučaj rednog vezivanja zavojnica moraju biti ispunjeni uslovi regularnosti redne veze. Na slici 4.15. prikazani su odgovarajuće Tevenenovo i Nortonovo ekvivalentno kolo.

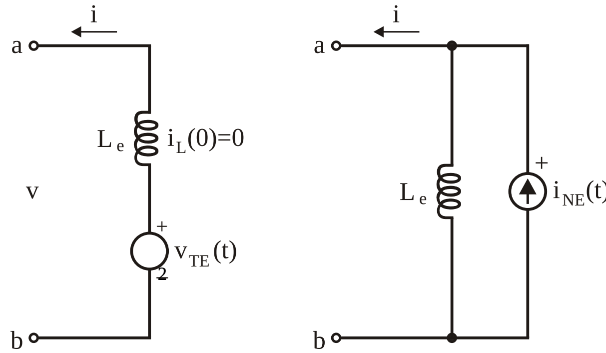


Figure 4.15: Tevenenov i Nortonov ekvivalentni generator kola koje sadrži LVN zavojnice

Napon $v_{TE}(t)$ predstavlja napon pri otpojenim krajevima a–b ($i(t)=0$). Oblik ovog napona zavisi od oblika pobudnih signala. Struja $i_{NE}(t)$ predstavlja struju pri kratko-spojenim krajevima a–b ($v(t)=0$). Pri tome vrijedi:

$$v_{TE}(t) = L_e \frac{d}{dt}[i_{NE}(t)] \tag{4.45}$$

$$i_{NE}(t) = \frac{1}{L_e} \int_{-\infty}^{t} v_{TE}(\tau)\, d\tau = i_{NE}(0) + \frac{1}{L_e} \int_{0}^{t} v_{TE}(\tau)\, d\tau \tag{4.46}$$

Ekvivalentni induktivitet L_e izračunava se na osnovu pravila o vezivanju zavojnica u kolu u kome su svi generatori eliminisani.

Na osnovu ekvivalencije Tevenenovog i Nortonovog kola, početno stanje zavojnice za $t_0 = 0$ možemo prikazati pomoću kola koje sadrži naponski generator početnih stanja $v_g(t)$, kao što je prikazano na slici 4.16.

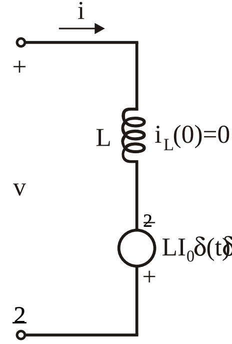


Figure 4.16: Generator početnog stanja $v_g(t) = LI_0\delta(t)$

Na osnovu jednačine 4.45 za slučaj $i(0) = I_0 u(t)$ slijedi:

$$v_g(t) = L\frac{di(t)}{dt} = L\frac{d}{dt}[I_0 u(t)] = LI_0 \frac{d}{dt}u(t) = LI_0\ \delta(t)$$

Dakle, ekvivalentni naponski generator $v_g(t)$ početnog stanja zavojnice ima karakter impulsnog generatora čiji je intenzitet impulsa jednak fluksu $\Phi_0 = LI_0$.

4.2.4 Snaga, energija i pasivnost zavojnice

Stanje vremenski nepromjenljive (VN) nelinearne zavojnice, definisano je ϕi karakteristikom $i = \hat{i}(\phi)$, koja je prikazana na slici 4.17.

Izmedju varijabli stanja pristupa $v(t)$ i $i(t)$ i fluksa $\phi(t)$ vrijede relacije:

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{d\phi}{dt} \\ i(t) &= \hat{i}(\phi) \end{aligned}$$

Energija koja se predaje zavojnici u intervalu (t_0, t) tada se izračunava pomoću relacije:

$$w(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} p(\tau)\ d\tau = \int_{t_0}^{t} v(\tau)i(\tau)\ d\tau = \int_{\phi(t_0)}^{\phi(t)} \hat{i}(\phi_1)\ d\phi_1 \qquad (4.47)$$

Pretpostavimo da je zavojnica u trenutku $t = t_0$ u stanju mirovanja, odnosno da je $\phi(t_0) = 0$. To znači da u trenutku t_0 nema akumulirane energije u magnetnom polju zavojnice, odnosno da je zavojnica u nultom energetskom stanju. Tada je energija koja se akumulira u zavojnici u intervalu (t_0, t) jednaka je energiji koja se

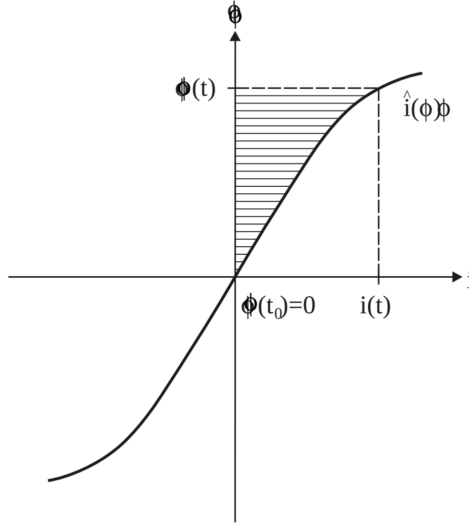


Figure 4.17: Karakteristika $i=\hat{\imath}(\phi)$ i grafička interpretacija akumulirane energije u VN zavojnici

predaje na njenom pristupu, odnosno vrijedi:

$$w_m(t) = w(t_0, t) = \int_0^{\phi(t)} \hat{\imath}(\phi_1)\ d\phi_1$$

Osjenčena površina iznad ϕi karakteristike, odnosno izmedju $\hat{\imath}(\phi)$ krive i ϕ ose, ima vrijednost integrala $\int_0^{\phi} \hat{\imath}(\phi_1) d\phi_1$ i za usaglašene smjerove varijabli stanja grafički predstavlja akumuliranu energiju u zavojnici. Za ϕi karakteristiku prikazanu na slici 4.17., koja prolazi kroz I i III kvadrant (uključujući i i ϕ osu), akumulirana energija je nenegativna. VN zavojnica kod koje je u svakom trenutku t akumulirana energija nenegativna, pripada klasi pasivnih elemenata. Zavojnica je aktivna, ukoliko nije pasivna. Prema tome, tačka u prostoru stanja (i, ϕ) u potpunosti definiše energetsko stanje VN zavojnice.

Ukoliko je $\phi(t_0) = \Phi_0 \neq 0$ u trenutku t_0 zavojnica ima zatečenu vrijednost akumulirane energije $W_m(t_0)$. Tada je energija koja se predaje zavojnici u intervalu (t_0, t) definisana relacijom:

$$w(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} v(\tau) i(\tau)\ d\tau = \int_{\phi(t_0)}^{\phi(t)} \hat{\imath}(\phi_1)\ d\phi_1 \ = \ w_m(t) - w_m(t_0)$$

Energija $w(t_0, t)$ koja se predaje zavojnici u intervalu (t_0, t) grafički jednaka je površini koja je omedjena sa $\hat{\imath}(\phi)$ krivom, ϕ osom i pravcima $\phi = \Phi_0$ i $\phi = \phi(t)$, kao što je prikazano na slici 4.18.

Ukoliko je $\phi(t_0) > \phi(t)$ energija koja je akumulirana u kondenzatoru u trenutku t_0 veća je od energije koja je akumulirana u trenutku t odnosno zavojnica u in-

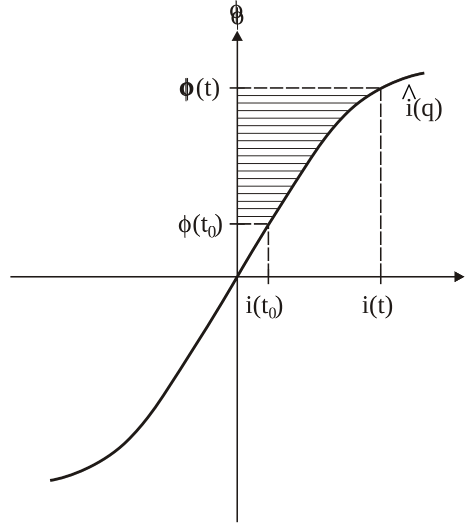


Figure 4.18: Grafička interpretacija akumulirane energije nelinearnog VN induktora za $\phi(t_0) \neq 0$

tervalu (t_0, t) vraća energiju u kolo. To još uvijek ne znači da je zavojnica aktivni element. Uslov pasivnosti VN zavojnice izražen je relacijom:

$$w_m(t) = [w(t_0, t) + w_m(t_0)] \geq 0, \quad \text{za svako } t_0 \text{ i za } t \geq t_0$$

Prema ovoj proširenoj definiciji uslov pasivnosti VN zavojnice glasi:
Suma zatečene akumulirane energije ($w_m(t_0)$) u trenutku t_0 i energije koja se preda zavojnici u intervalu (t_0, t) ($w(t_0, t)$) mora biti nenegativna vrijednost.

Za LVN zavojnicu vrijedi:

$$\phi(t) = Li(t)$$

odnosno njena ϕi karakteristika predstavljena je pravcem u $i\phi$ koordinatnom sistemu, koji prolazi kroz ishodište. Odavde slijedi:

$$w_m(t) = \int_0^{\phi(t)} \frac{\phi_1}{L}\, d\phi_1 = \frac{1}{2}\, \frac{\phi^2(t)}{L} = \frac{1}{2}\, Li^2(t)$$

Zbog kvadrata fluksa $\phi^2(t)$ smjer fluksa ne utiče na iznos akumulirane energije. Uslov pasivnosti LVN zavojnice definisan je relacijom:

$$w_m(t) = w(t_0, t) + w_m(t_0) = \frac{1}{2}\, \frac{\phi^2(t)}{C} \;\geq\; 0, \quad \text{za svako } t_0 \text{ i za } t \geq t_0$$

Prema tome, LVN zavojnica je pasivna za $L \geq 0$ odnosno aktivna za $L < 0$. Model aktivne LVN zavojnice predstavlja proces akumuliranja negativne elektromagnetne energije, kada zavojnica ima sposobnot razmjene energije izvan kola, što nije osobina koju posjeduju realne fizičke komponente.

Za linearnu, vremenski promjenljivu zavojnicu, prema relaciji 4.47 vrijedi:

$$\begin{aligned} w(t_0,t) &= \int_{t_0}^{t} p(\tau)\ d\tau = \int_{t_0}^{t} p_e(\tau)\ d\tau + \int_{t_0}^{t} p_m(\tau)\ d\tau \\ &= \int_{t_0}^{t} \frac{dw_m(\tau)}{d\tau}\ d\tau + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} i^2(\tau)\frac{dL(\tau)}{d\tau}\ d\tau \\ &= w_m(\tau)|_{t_0}^{t} + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} i^2(\tau)\dot{L}(\tau)\ d\tau \\ &= w_m(t) - w_m(t_0) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} i^2(\tau)\dot{L}(\tau)\ d\tau \end{aligned}$$

odnosno:

$$w(t_0,t) + w_m(t_0) = \frac{1}{2}\ L(t)i^2(t) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} i^2(\tau)\dot{L}(\tau)\ d\tau$$

Tada se uslov pasivnosti LVP zavojnice definiše relacijom:

$$w(t_0,t) + w_m(t_0) \geq 0$$

odakle slijedi:

$$\frac{1}{2}\ L(t)i^2(t) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} i^2(\tau)\dot{L}(\tau)\ d\tau \geq 0$$

Prethodni uslov mora biti ispunjen za svako t i svaku vrijednost $i(t)$. Iz uslova pasivnosti izvodimo zakljucak da je LVP zavojnica pasivan element ukoliko za svako t vrijedi:

$$\begin{aligned} L(t) &\geq 0 \\ \dot{L}(t) &\geq 0 \end{aligned}$$

Do istog zaključka možemo doći polazeći od jednačine LVP zavojnice:

$$\phi(t) = L(t)\ i(t)$$

odakle slijedi:

$$v(t) = \frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{d}{dt}[L(t)i(t)] = L(t)\frac{di(t)}{dt} + \dot{L}(t)i(t)$$

Na osnovu prethodne jednačine LVP zavojnicu možemo posmatrati kao rednu vezu LVN zavojnice, čiji je induktivitet $L(t)$ i LVP otpornika, čija je provodnost $\dot{L}(t)$. Uslov pasivnosti LVN zavojnice zahtijeva da je $L(t) \geq 0$, a uslov pasivnosti otpornika da je $\dot{L}(t) \geq 0$.

4.3 Opšti model elementa i analogni elementi

U prethodnim poglavljima definisani su pojmovi snage i energije, koje se predaju elementu kola, kao i koncept pasivnosti elemenata. Takodje je pokazano kako varijable stanja elementa $(v(t), i(t), q(t), \phi(t))$ jednoznačno definišu energetsko stanje elementa za svaki trenutak t. Opisani pojmovi se mogu proširiti na koncept modelovanja opšteg elemenata sa jednim pristupom, koji se koristi u teoriji sistema. Izbor varijabli stanja elemenata, koje definišu njegovo energetsko stanje, zavisi od fizikalnosti procesa (prenosa i konverzije energije) u posmatranom elemenatu. U ovoj sekciji, na jednostavnim primjerima, opisan je pristup modelovanja elemenata, koji je baziran na izboru podužnih i poprečnih varijabli stanja. Na slici 4.19. simbolički je prikazana šema opšteg elementa sa jednim pristupom sa naznačenim pridruženim varijablama stanja.

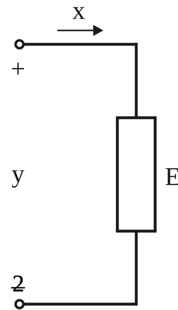


Figure 4.19: Opšti model elementa i pridružene varijable stanja x i y

Kod fizičkih elemenata mogu se definisati dvije vrste varijabli stanja:

- "podužne" varijable stanja, na slici označene sa x
- "poprečne" varijable, na slici označene sa y.

Općenito, element predstavlja fizičku komponentu koja odredjuje funkcionalnu vezu izmedju pridruženih varijabli stanja: podužne x i poprečne y. Podužne varijable su fizičke veličine koje su potpuno definisane kao apsolutne vrijednosti. U ovu grupu fizičkih veličina spadaju struja kroz element i, sila f, protok q. Poprečne varijable su fizičke veličine koje imaju značenje samo u odnosu na neku referentnu veličinu. U ovu grupu fizičkih veličina spadaju napon izmedju krajeva elementa v, brzina υ, temperatura T i sl. Izbor podužnih i poprečnih varijabli bazira se na fizičkim zakonima procesa u modelovanim elementima i na konceptu teorije sistema.

Kod opšteg modela elementa proizvod trenutnih vrijednosti podužne $x(t)$ i poprečne $y(t)$ varijable stanja jednak je trenutnoj snazi $p(t)$ koja se predaje elementu, odnosno:

$$p(t) = x(t)\ y(t)$$

Ukoliko je $p(t) > 0$, snaga se predaje elementu u trenutku t, a za $p(t) < 0$ element predaje snagu u sistem. Šta se dogadja sa snagom (energijom) unutar elementa zavisi od njegovog karaktera. Ukoliko element posjeduje osobinu da se protivi trenutnoj promjeni snage koja mu se predaje, element pripada klasi dinamičkih elemenata. Ovi elementi imaju sposobnost akumuliranja energije te se nazivaju konzervativni elementi. Elementi kod koji se snaga $p(t)$ može trenutno mijenjati pripadaju statičkim elementima. Ovi elementi nemaju sposobnost akumuliranja energije, nego se u njima vrši trenutna konverzija energije iz jednog u drugi oblik. Zato se ovi elementi nazivaju nekonzervativni elementi.

Karakteristika elementa definiše odnos izmedju varijabli stanja, koji je u opštem slučaju za vremenski kontinualne elemente izražen jednačinom stanja $F(x, y, t) = 0$. Ako se vrijednost poprečne varijable može eksplicitno izraziti preko podužne varijable karakteristika elementa je opisana izrazom $y = f(x, t)$. Element kod kojeg je funkcionalna veza $y = f(x, t)$ linearna funkcija pripada klasi linearnih elemenata. Kod ovih elemenata karakteristika $y = f(x, t)$ predstavlja pravac koji prolazi kroz ishodište koordinatnog xy prostora stanja.

Dinamički elementi električnih kola (kondenzator i zavojnica) predstavljaju se pomoću qv i ϕi karakteristika. Dakle, kod ovih elemenata naelektrisanje q i fluks ϕ predstavljaju varijable stanja. Za linearne elemente ove karakteristike grafički se predstavljaju pravcima koji prolaze kroz ishodište u prostoru stanja. Medjutim, naelektrisanje q i fluks ϕ ne mogu se klasifikovati kao podužna ili poprečna varijabla odgovarajućih elemenata. Naelektrisanje q povezano je sa strujom i relacijom:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

a fluks ϕ sa naponom v relacijom:

$$v(t) = \frac{d\phi(t)}{dt}$$

Pošto je diferenciranje linearna operacija, za linearne kondenzatore i zavojnice slijedi da je funkcionalna veza odgovarajućih napona v i struja i elementa takodje linearna funkcija. Treba napomenuti da je i integralenje linearna operacija. Tako se zaključak o linearnosti kondenzatora i zavojnica može izvesti i polazeći od relacija:

$$\begin{aligned} q(t) &= \int_{-\infty}^{t} i(\tau)\, d\tau \\ \phi(t) &= \int_{-\infty}^{t} v(\tau)\, d\tau \end{aligned}$$

Elementi koji imaju identičan oblik jednačina stanja nazivaju se analogni elementi. To znači da su matematičke relacije, koje povezuju podužne $x(t)$ i poprečne $y(t)$ varijable stanja analognih elemenata identične, ali je različito fizičko značenje konstanti, koje se u njima pojavljuju. Energetski procesi u analognimn elementima su takodje analogni, što omogućava da se i procesi prenosa i konverzije energije u

analognim elementima analiziraju koristeći princip analogije. Analogni elementi sa elementima električnih kola mogu se identifikovati za mehaničke, hidrauličke, termičke i druge fizičke procese. U sljedećem poglavlju opisane su relacije izmedju poprečnih i podužnih varijabli u nekim karakterističnim fizičkim sistemima. Koncept analognih elemenata omogućava da se principi, tehnike i metode teorije električnih kola primijene i na mnogo šire područje analize fizičkih sistema. Zbog toga se oblast teorije električnih kola može posmatrati kao uvod u proučavanje opšte teorije sistema.

4.3.1 Analogni elementi u translatornim mehaničkim sistemima

Translatorni sistemi opisuju procese kretanja masa, kompresije opruga i prigušivača. Podužna varijabla stanja je sila f a poprečna varijabla brzina translatornog kretanja v, kao što je prikazano na slici 4.20.

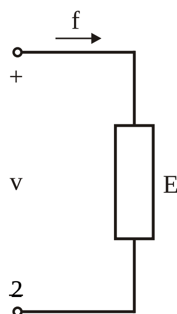


Figure 4.20: Opšti model elementa u mehaničkim translatornim sistemima

Brzina je poprečna varijabla pošto fizički smisao ima samo u definisanom referentnom sistemu. Snaga koja se predaje elementu u trenutku t ima vrijednost:

$$p(t) = f(t)\ v(t)$$

Za kondenzator analogni element u mehaničkim translatornim sistemima je kruto tijelo mase M.

Za tijelo na slici 4.21, zanemarujući trenje izmedju tijela i podloge, vrijede Njutnovi zakoni opisani jednačinama:

$$f(t) = Ma(t) = M\frac{dv}{dt} \tag{4.48}$$

gdje je $a-$ ubrzanje tijela ($a = dv/dt$). Integriranjem jednačine 4.48 slijedi:

$$v(t) = \frac{1}{M}\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\ d\tau$$

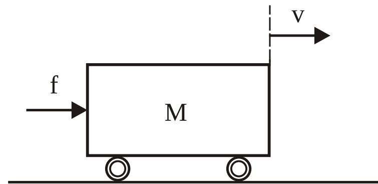


Figure 4.21: Model translatornog kretanja tijela mase M

Iz analitičkih oblika jednačina stanja za translatorno kretanje tijela očigledna je analogija sa modelom kondenzatora u električnim kolima. U ovom slučaju analogne mehaničke i električne varijable su prikazane u tabeli u nastavku.

varijabla električnog kola	mehanička varijabla
struja $i(t)$	sila $f(t)$
napon $v(t)$	brzina $v(t)$
Kapacitet C	masa M

Analogni element u mehaničkim translatornim sistemima za zavojnicu je translatorna opruga, čija je šema prikazana na slici 4.22.

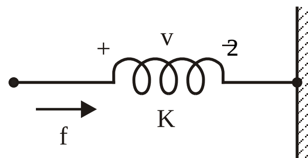


Figure 4.22: Model translatorne opruge

Koeficijent K izražava elastičnost opruge. Izmedju varijabli stanja opruge vrijede relacije:

$$\begin{aligned} x(t) &= Kf(t) \\ v(t) &= \frac{dx(t)}{dt} = K\frac{df(t)}{dt} \end{aligned}$$

odakle nakon integralenja slijedi:

$$f(t) = \frac{1}{K}\int_{-\infty}^{t} v(\tau)\, d\tau$$

Integral $\int_{-\infty}^{t} \upsilon(\tau)d\tau$ jednak je prostornoj kompresiji opruge x. Za ovaj slučaj analogne električne i mehaničke varijable stanja su:

varijabla električnog kola	mehanička varijabla
struja $i(t)$	sila $f(t)$
napon $v(t)$	brzina $\upsilon(t)$
kapacitet C	elastičnost K

Jednačina stanja translatornog prigušivača ima oblik:

$$f(t) = D\upsilon(t)$$

gdje je $D-$ koeficijent prigušenja. Model prigušivača prikazan je na slici 4.23.

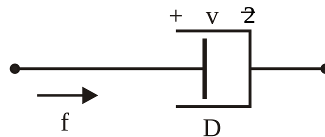


Figure 4.23: Model translatornog prigušivača

Brzina kompresije prigušivača $\upsilon(t)$ direktno je proporcionalna sili djelovanja $f(t)$. Za razliku od opruga, kada sila prestaje djelovati na prigušivač on se ne vraća u početni položaj. Zato se prigušivač koristi za modelovanje trenja u jednačinama kretanja tijela u zraku, tekučini ili po površini. Pri tome se pretpostavlja da je sila trenja proporcionalna brzini, odnosno da je pri večoj brzini potrebna veča sila za savladavanje otpora trenja. Prema tome jednačina stanja prigušivača analogna je sa jednačinom stanja otpornika.

Konačno, analogno sa generatorima u električnim kolima, pri modelovanju mehaničkih sistema koriste se modeli nezavisnih izvora sile i brzine, čiji su simboli identični simbolima nezavisnih naponskih i strujnih generatora.

4.3.2 Analogni elementi u rotirajućim mehaničkim sistemima

Modelovanje procesa u mehaničkim sistemima sa rotirajućim elementima ima veliki značaj prilikom proučavanja elektro-mehaničkih procesa konverzije energije u električnim rotacionim mašinama. U rotirajućim mehaničkim sistemima poprečna varijabla stanja je ugaona brzina $\omega(t)$, a podužna varijabla moment $m(t)$. Opšti model elementa rotirajućih mehaničkih sistema prikazan je na slici 4.24.Snaga koja se u trenutku t predaje ovom elementu izražena je relacijom:

$$p(t) = m(t)\ \omega(t)$$

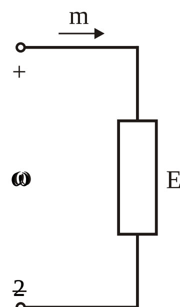


Figure 4.24: Opšti model elementa rotirajućih mehaničkih sistema

Analogni elementi za kondenzator (tijelo inercije rotacije J), zavojnicu (opruga koeficijenta istezanja K) i otpornik (prigušivač koeficijenta otpornosti D), kao i odgovarajuće jednačine stanja, prikazani su na slici 4.25.

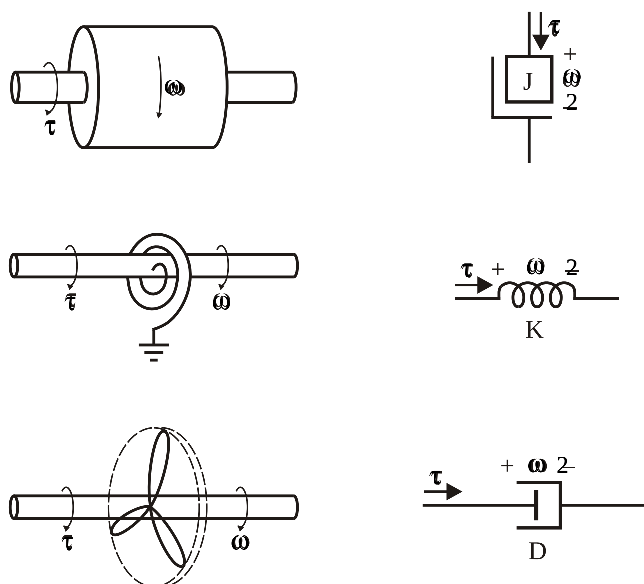


Figure 4.25: Modeli i jednačine stanja elemenata rotirajućih mehaničkih sistema

Chapter 5

Elementi kola sa dva pristupa

Elektromagnetne procese u pojedinim fizičkim komponentama nije moguće predstaviti pomoću modela elemenata sa jednim pristupom. Primjer ovakvih komponenti je transformator, čije energetsko stanje se opisuje naponima i strujama na primarnom i sekundarnom namotaju. Za predstavljanje ovakvih komponenti koriste se modeli elemenata kola sa dva pristupa, koji su opisani u ovom poglavlju.

5.1 Magnetno spregnute zavojnice

Električno kolo može da sadrži dva ili više magnetno spregnutnih zavojnica. Struja i napon u jednoj od spregnutih zavojnica zavisi od vrijednosti struja i napona u preostalim spregnutim zavojnicama. Zato se spregnute zavojnice klasifikuju kao elementi sa dva ili više pristupa. Pošto su im varijable stanja medjusobno povezane, spregnute zavojnice pripadaju klasi povezanih elemenata. Na slici 5.1 prikazana je šema dvije magnetno spregnute zavojnice.

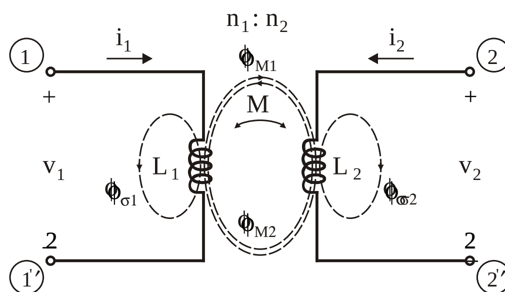


Figure 5.1: Model magnetno spregnutih zavojnica

Kolo prikazano na slici 5.1 predstavlja model dvije zavojnice, koja se nalaze na takvoj fizičkoj udaljenosti da dio magnetnog fluksa, koji proizvodi jedna od zavojnica, obuhvata i drugu zavojnicu. Tada je ukupan fluks Φ_j zavojnice j odredjen relacijom:

$$\Phi_j = \Phi_{jj} + \Phi_{jk} \tag{5.1}$$

gdje su:

- Φ_{jj} - fluks koji obuhvata zavojnicu j, a potiče od struje i_j
- Φ_{jk} - fluks koji obuhvata zavojnicu j, a potiče od stuje i_k.

Za kolo prikazano sa slici 5.1 $(j, k = 1, 2)$ vrijedi:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \Phi_{11} + \Phi_{12} \\ \Phi_2 &= \Phi_{21} + \Phi_{22} \end{aligned} \tag{5.2}$$

Induktiviteti kola L_{jk} definišu se prema opštem izrazu:

$$L_{jk} = \frac{n_j \Phi_{jk}}{i_k} \tag{5.3}$$

gdje su:

- L_{jj} - sopstveni induktivitet zavojnice j (samoinduktivitet)
- L_{jk} - medjusobni induktivitet zavojnica j i k (medjuinduktivitet).

Induktivitet L_{jk} povezuje fluks Φ_{jk} u zavojnici j, koji potiče od struje i_k, i struju i_k prema relaciji:

$$L_{jk} i_k = n_j \Phi_{jk}$$

tako da vrijedi:

$$L_{jk} \frac{di_k}{dt} = n_j \frac{d\Phi_{jk}}{dt} \tag{5.4}$$

Za usvojene referentne smjerove napona v_1 i v_2 i struja i_1 i i_2 jednačine stanja zavojnica možemo izraziti relacijama:

$$\begin{aligned} n_1 \Phi_1 &= n_1 \Phi_{11} + n_1 \Phi_{12} = L_{11} i_1 + L_{12} i_2 \\ n_2 \Phi_2 &= n_2 \Phi_{21} + n_2 \Phi_{22} = L_{21} i_1 + L_{22} i_2 \\ v_1 &= \frac{d(n_1 \Phi_1)}{dt} = L_{11} \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{di_2}{dt} \\ v_2 &= \frac{d(n_2 \Phi_2)}{dt} = L_{21} \frac{di_1}{dt} + L_{22} \frac{di_2}{dt} \end{aligned}$$

Pošto fluksevi Φ_{12} i Φ_{21} prolaze kroz istu reluktansu vrijedi:

$$\frac{n_1 i_1}{\Phi_{21}} = \frac{n_2 i_2}{\Phi_{12}}$$

odakle slijedi:

$$\frac{n_1\Phi_{12}}{i_2} = \frac{n_2\Phi_{12}}{i_1}$$

odnosno:

$$L_{12} = L_{21} \tag{5.5}$$

Uobičajeno se usvaja sljedeće označavanje parametara spregnutih zavojnica:

$$\begin{aligned} L_{12} &= L_{21} = M \\ L_{11} &= L_1 \\ L_{22} &= L_2 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Tada se jednačine stanja spregnutih zavojnica mogu izraziti relacijama:

$$\begin{aligned} v_1 &= L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} \\ v_2 &= M\frac{di_1}{dt} + L2\frac{di_2}{dt} \end{aligned} \tag{5.7}$$

Induktiviteti L_1 i L_2 su uvijek pozitivni, a predznak medjuindiktiviteta M zavisi od fizičkih karakteristika zavojnica (načina sprege) i usvojenih referentnih smjerova napona i struja. Predznak medjuinduktiviteta M može se odrediti iz režima praznog hoda pristupa "2" (za $i_2 = 0$), kada za usvojene referentne smjerove vrijedi:

$$v_{20} = M\left.\frac{di_1}{dt}\right|_{i_2=0}$$

Ako pri povečanju struje i_1 (za $di_1/dt > 0$) napon v_{20}, koji inducira struja i_1 u namotaju "2", ima pozitivnu vrijednost ($v_{20} > 0$), tada je sprega pozitivna ($M > 0$). U suprotnom slučaju za $v_{20} < 0$ sprega je negativna ($M < 0$). Fizikalno objašnjenje procesa odredjivanja predznaka magnetne sprege (predznaka medjuinduktiviteta M), na osnovu analize procesa akumuliranja energije u spregnutim zavojnicama, opisano je u poglavlju 5.1.3.

Magnetno sprezanje zavojnica može se izraziti i pomoću koeficijenta magnetne sprege k, koji definiše odnos izmedju spregnutog fluksa Φ_{kj}, koji obuhvata namotaj k a potiče od struje i_j, i ukupnog fluksa Φ_{jj}, koji potiče od struje i_j. Za posmatrano kolo koeficijent k se definiše prema relaciji:

$$k = \frac{\Phi_{21}}{\Phi_{11}} = \frac{\Phi_{12}}{\Phi_{22}} \tag{5.8}$$

Pošto je fluks Φ_{kj} dio fluksa Φjj slijedi $0 \le k \le 1$. Ukoliko nema rasipanja fluksa izmedju namotaja (savršeno sprezanje) tada je $k = 1$. Vezu izmedju koeficijenata M i k možemo izvesti polazeći od relacija:

$$\begin{aligned} M &= L_{12} = n_1\frac{\Phi_{12}}{i_2} \\ M &= L_{21} = n_2\frac{\Phi_{21}}{i_1} \end{aligned}$$

odakle slijedi:

$$
\begin{aligned}
M^2 &= \left(n_1 \frac{\Phi_{12}}{i_2}\right)\left(n_2 \frac{\Phi_{21}}{i_1}\right) \\
&= n_1 \left(k \frac{\Phi_{22}}{i_2}\right) n_2 \left(k \frac{\Phi_{11}}{i_1}\right) \\
&= k^2 \left(n_1 \frac{\Phi_{11}}{i_1}\right)\left(n_2 \frac{\Phi_{22}}{i_2}\right) = k^2\ L_{11} L_{22}
\end{aligned}
$$

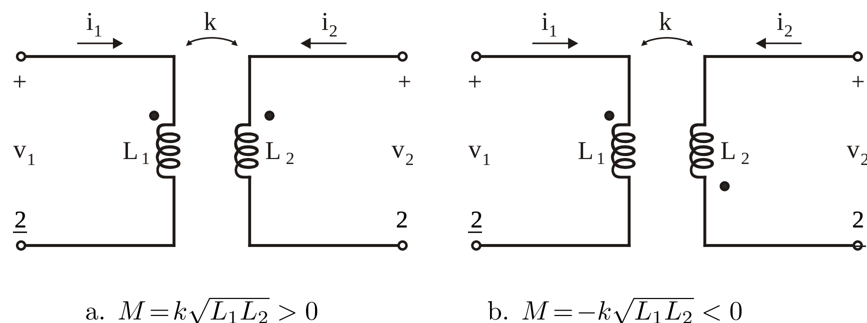
Konačno se izvodi:

$$|M| = k\sqrt{L_1 L_2}$$

ili:

$$k = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}} \tag{5.9}$$

U modelima spregnutih zavojnica predznak magnetne sprege označava se grafičkim simbolima $(*, \bullet, \circ, \diamond)$. Na slici 5.2 prikazane su magnetno spregnute zavojnice za dva načina sprege: na slici 5.2.a za $M>0$ i na slici 5.2.b za $M<0$.



a. $M = k\sqrt{L_1 L_2} > 0$ b. $M = -k\sqrt{L_1 L_2} < 0$

Figure 5.2: Model magnetno-spregnutih zavojnica

5.1.1 Matrične jednačine spregnutih zavojnica

Jednačine stanja spregnutih zavojnica, za $n_1 = n_2 = 1$, možemo napisati u matričnoj formi:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix}$$

odnosno u obliku matrične jednačine:

$$\mathbf{v} = \mathbf{L}\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\Phi}}{dt} \tag{5.10}$$

Simetrična matrica $\mathbf{L}$ naziva se matrica induktiviteta. Prema tome, spregnute zavojnice jednoznačno su definisane sa tri parametra (L_1, L_2, M).

Inverzna matrica $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{L}^{-1}$ naziva se matrica recipročnih induktiviteta. Jednačine stanja spregnutih zavojnica mogu se izraziti pomoću matrice $\mathbf{\Gamma}$ matričnom relacijom:

$$\mathbf{i} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Gamma}\ \mathbf{\Phi} \tag{5.11}$$

ili u skalarnom obliku:

$$\begin{aligned} i_1 &= \Gamma_{11}\Phi_1 + \Gamma_{12}\Phi_2 \\ i_2 &= \Gamma_{21}\Phi_1 + \Gamma_{22}\Phi_2 \end{aligned}$$

Matrica $\mathbf{\Gamma}$ je simetrična matrica, pošto vrijedi $\Gamma_{12} = \Gamma_{21}$. Jednačine stanja, izražene preko varijabli stanja (v, i), koristeći koeficijente matrice recipročnih induktiviteta $\mathbf{\Gamma}$, imaju oblik:

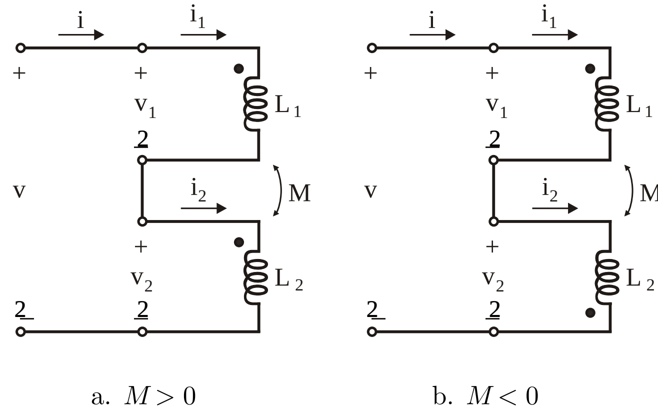
$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} \int_{-\infty}^{t} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} d\tau \\ &= \begin{bmatrix} i_{10} \\ i_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} \int_{0}^{t} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} d\tau \end{aligned}$$

ili u skalarnom obliku:

$$\begin{aligned} i_1 &= i_1(0) + \Gamma_{11}\int_0^t v_1(\tau)\ d\tau + \Gamma_{12}\int_0^t v_2(\tau)\ d\tau \\ i_2 &= i_2(0) + \Gamma_{21}\int_0^t v_1(\tau)\ d\tau + \Gamma_{22}\int_0^t v_2(\tau)\ d\tau \end{aligned} \tag{5.12}$$

5.1.2 Redna i paralelna veza spregnutih zavojnica

Na slici 5.3. prikazana je redna veza magnetno spregnutih zavojnica L_1 i L_2 za različite predznake medjuinduktiviteta: $M > 0$ i $M < 0$.



a. $M > 0$ b. $M < 0$

Figure 5.3: Redna veza spregnutih zavojnica

Polazeći od jednačina koje opisuju rednu vezu:

$$\begin{aligned} v &= v_1 + v_2 \\ i &= i_1 = i_2 \end{aligned} \tag{5.13}$$

za $M > 0$ vrijedi:

$$\begin{aligned} v &= L\frac{di}{dt} = v_1 + v_2 = \left(L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt}\right) + \left(M\frac{di_1}{dt} + L_2\frac{di_2}{dt}\right) \\ &= |i = i_1 = i_2| \ = \ (L_1 + L_2 + 2M)\frac{di}{dt} \end{aligned}$$

odakle je:

$$L = L_1 + L_2 + 2M$$

Za $M < 0$ vrijedi:

$$\begin{aligned} v &= L\frac{di}{dt} = v_1 + v_2 = \left(L_1\frac{di_1}{dt} - M\frac{di_2}{dt}\right) + \left(-M\frac{di_1}{dt} + L_2\frac{di_2}{dt}\right) \\ &= (L_1 + L_2 - 2M)\frac{di}{dt} \end{aligned}$$

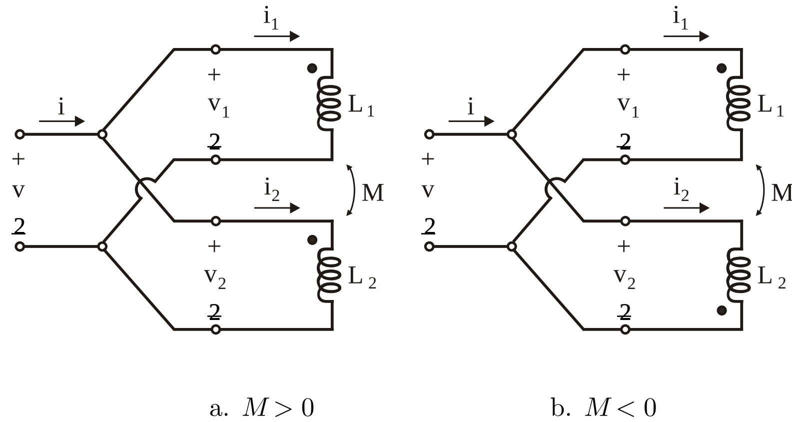
odakle je:

$$L = L_1 + L_2 - 2M$$

Prema tome, za rednu vezu spregnutih zavojnica L_1 i L_2 vrijedi:

$$L = L_1 + L_2 \pm\ 2|M| \tag{5.14}$$

Paralelna veza spregnutih zavojnica za $M > 0$ i $M < 0$ prikazana je na slici 5.4.



a. $M > 0$ b. $M < 0$

Figure 5.4: Paralelna veza spregnutih zavojnica

Polazeći od jednačina koje opisuju paralelnu vezu:

$$\begin{aligned} i &= i_1 + i_2 \\ v &= v_1 = v_2 \end{aligned} \tag{5.15}$$

za $M > 0$ slijedi:

$$\begin{aligned} i &= \Gamma \int_{-\infty}^{t} v(\tau) d\tau = i(0) + \Gamma \int_0^t v(\tau) d\tau = i_1 + i_2 \\ &= i_1(0) + \int_0^t [\Gamma_1 v_1(\tau) + \Gamma_{12} v_2(\tau)]\ d\tau + i_2(0) + \int_0^t [\Gamma_{21} v_1(\tau) + \Gamma_2 v_2(\tau)]\ d\tau \\ &= |v = v_1 = v_2| = i_1(0) + i_2(0) + \int_0^t [\Gamma_1 + \Gamma_2 + 2\ \Gamma_{12}]\ v(\tau)\ d\tau \end{aligned}$$

odakle je:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \Gamma_1 + \Gamma_2 + 2\ \Gamma_{12} \\ i(0) &= i_1(0) + i_2(0) \end{aligned}$$

Za $M < 0$ vrijedi:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \Gamma_1 + \Gamma_2 - 2\ \Gamma_{12} \\ i(0) &= i_1(0) + i_2(0) \end{aligned}$$

Prema tome, za paralelnu vezu spregnutih zavojnica (Γ_1 i Γ_2) vrijedi:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \Gamma_1 + \Gamma_2 \pm 2\ |\Gamma_{12}| \\ i(0) &= i_1(0) + i_2(0) \end{aligned} \tag{5.16}$$

5.1.3 Snaga i energija spregnutih LVN zavojnica

Trenutna snaga koja se predaje spregnutim LVN zavojnicama, za usaglašene referentne smjerove napona i struja pristupa, definisana je relacijom:

$$p(t) = v_1(t)\ i_1(t) + v_2(t)\ i_2(t) \tag{5.17}$$

Pretpostavimo da se u trenutku $t = 0$ zavojnice nalaze u nultom energetskom stanju ($i_1(0) = i_2(0) = 0$). Energija koja se u intervalu $[0, t]$ predaje zavojnicama izražena je relacijom:

$$w_m[i_1(t), i_2(t)] = \int_0^t [v_1(\tau) i_1(\tau) + v_2(\tau) i_2(\tau)]\ d\tau$$

Substitucijom $v_1(t)$ i $v_2(t)$ preko $i_1(t)$ i $i_2(t)$ dobijamo:

$$\begin{aligned} w_m[i_1, i_2] &= \int_0^t \left[L_1 i_1 \frac{di_1(\tau)}{d\tau} + M \left(i_1 \frac{di_2(\tau)}{d\tau} + i_2 \frac{di_1(\tau)}{d\tau} \right) + L_2 i_2 \frac{di_2(\tau)}{d\tau} \right] d\tau \\ &= \frac{1}{2}\ L_1 i_1^2(t) + M i_1(t) i_2(t) + \frac{1}{2}\ L_2 i_2^2(t) \\ &= w_m[i_1, 0] + M i_1(t) i_2(t) + w_m[0, i_2] \end{aligned}$$

Energija $w_m[i_1, 0]$ predstavlja energiju koja se akumulira u zavojnici L_1, uslijed proticanja struje $i_1(t)$ (za $i_2(t)=0$). Energija $w_m[0, i_2]$ analogno predstavlja energiju koja se akumulira u zavojnici L_2, uslijed proticanja struje $i_2(t)$ (za $i_1(t)=0$). Treća komponenta $Mi_1(t)i_2(t)$ u izrazu za energiju $w_m[i_1, i_2]$ potiče od magnetnog sprezanja struja $i_1(t)$ i $i_2(t)$. Za $M > 0$ ovaj član je pozitivan, a za $M < 0$ negativan. Bez obzira na predznak koeficijenta M, za $L_1 > 0$ i $L_2 > 0$ energija koja se predaje spregnutim LVN zavojnicama veća je od nule, što se za nulte početne vrijednosti struja izražava relacijom:

$$w_m[i_1(t), i_2(t)] = \frac{1}{2}\, L_1 i_1^2(t) + M i_1(t) i_2(t) + \frac{1}{2}\, L_2 i_2^2(t) \geq 0 \tag{5.18}$$

Ukoliko je u trenutku $t=0$ u zavojnicama akumulirana početna energija:

$$w_m[i_1(0), i_2(0)] = \frac{1}{2}\, L_1 i_1^2(0) + M i_1(0) i_2(0) + \frac{1}{2}\, L_2 i_2^2(0) \geq\ 0$$

tada vrijedi:

$$w_m(t) = w_m[i_1(t), i_2(t)] + w_m[i_1(0), i_2(0)] \geq\ 0 \tag{5.19}$$

Iz uslova $w_m(t) \geq 0$, za $k = |M|/\sqrt{L_1 L_2}$, moguće je dokazati ograničenje $k \leq 1$. Jednačinu (5.18) napišimo u obliku:

$$w_m(t) = \frac{1}{2}\, L_1 \left(i_1 + \frac{M}{L_1}\, i_2\right)^2 + \frac{1}{2}\left(L_2 - \frac{M^2}{L_1}\right) i_2^2$$

Pošto za svako t vrijedi:

$$\frac{1}{2}\, L_1 \left(i_1 + \frac{M}{L_1} i_2\right)^2 \geq 0$$

iz uslova $w_m(t) \geq 0$ slijedi:

$$\frac{1}{2}\left(L_2 - \frac{M^2}{L_1}\right) i_2^2 \geq 0$$

odnosno, mora biti ispunjen uslov:

$$\left(L_2 - \frac{M^2}{L_1}\right) \geq 0$$

Tada vrijedi:

$$L_1 L_2 \geq M^2$$

odakle izvodimo:

$$k = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}}\ \leq\ 1 \tag{5.20}$$

5.1.4 Ekvivalentne šeme spregnutih zavojnica

Kolo koje sadrži magnetno spregnute zavojnice možemo predstaviti ekvivalentnim šemama, koje ne sadrže magnetne sprege. Za kolo prikazano na slici 5.5, za nulte početne vrijednosti $i_1(0)=i_2(0)=0$, jednačine stanja možemo napisati u obliku:

$$\begin{aligned} v_1 &= L_1\frac{di_1}{dt}+e_1 \\ v_2 &= L_2\frac{di_2}{dt}+e_2 \end{aligned} \tag{5.21}$$

gdje su e_1 i e_2 zavisni naponski generatori:

$$\begin{aligned} e_1 &= M\,\frac{di_2}{dt} \\ e_2 &= M\,\frac{di_1}{dt} \end{aligned} \tag{5.22}$$

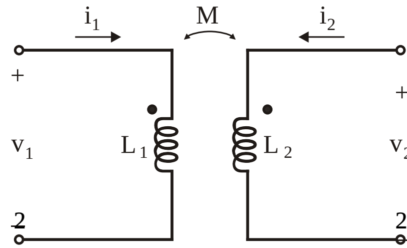
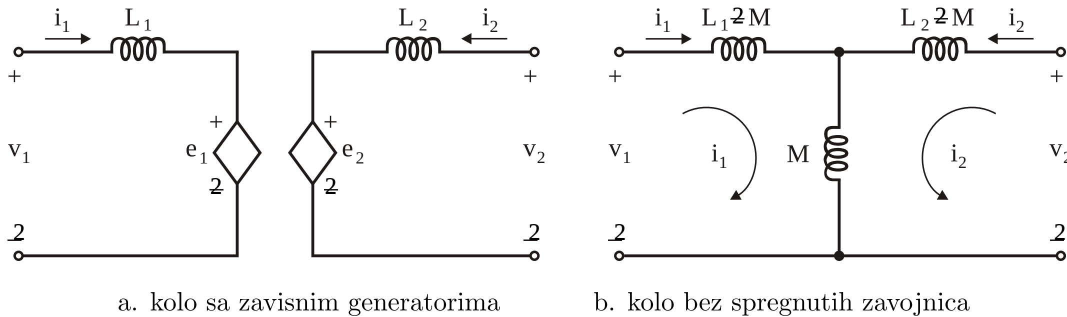


Figure 5.5: Kolo sa megnetno spregnutim zavojnicama

Odgovarajuće ekvivalentno kolo, koje sadrži zavisne naponske generatore, prikazano je na slici 5.6.a.



a. kolo sa zavisnim generatorima b. kolo bez spregnutih zavojnica

Figure 5.6: Ekvivalentne šeme za kolo sa magnetno spregnutim zavojnicama

Na slici 5.6.b prikazano je kolo koje ne sadrži spregnute elemente. Jednačine stanja ovog kola imaju oblik:

$$\begin{aligned} v_1 &= (L_1 - M)\frac{di_1}{dt} + M\frac{d(i_1+i_2)}{dt} = L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} \\ v_2 &= (L_2 - M)\frac{di_2}{dt} + M\frac{d(i_1+i_2)}{dt} = M\frac{di_1}{dt} + L_2\frac{di_2}{dt} \end{aligned} \tag{5.23}$$

Pod uslovom da su krajevi $1'$ i $2'$ u kolu sa slike 5.5 identični, jednačine stanja kola bez spregnutih zavojnica imaju isti oblik kao i jednačine za kolo sa spregnutima zavojnicama.

5.1.5 Idealni transformator

Specijalni slučaj magnetno spregnutih zavojnica predstavlja element kola, koji sadrži spregnute zavojnice i ima sljedeće karakteristike:

- nema rasipanja fluksa, odnosno magnetno sprezanje je idealno ($k = 1$)
- samoinduktiviteti zavojnica su beskonačni ($L_1 = L_2 = \infty$), tako da struje zavojnica ne utiču na napone.

Jednačine stanja magnetne sprege koja ima ove osobine su:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= n_1\Phi \\ \Phi_2 &= n_2\Phi \end{aligned}$$

odakle je:

$$v_1 = n_1\frac{d\Phi}{dt} = \frac{n_1}{n_2}\frac{d\Phi_2}{dt} = \frac{n_1}{n_2}\, v_2$$

odnosno:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{n_1}{n_2} \tag{5.24}$$

Takodje vrijedi:

$$n_1 i_1 + n_2 i_2 = 0$$

odakle slijedi:

$$\frac{i_1}{i_2} = -\frac{n_2}{n_1} \tag{5.25}$$

Ovakva sprega predstavlja idealni transformator, čija šema je prikazana na slici 5.7.

Prema tome, idealni transformator je element kola sa dva pristupa kod koga naponi i struje pristupa nisu medjusobno zavisne varijable. Matrični oblik jednačina stanja idealnog transformatora ima izgled:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1/n_2 & 0 \\ 0 & -n_2/n_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ i_2 \end{bmatrix} \tag{5.26}$$

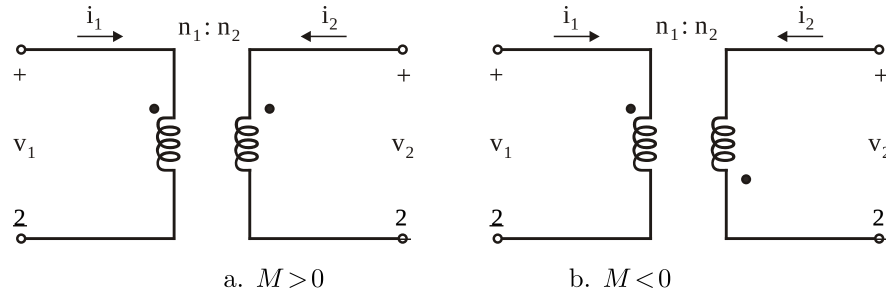


Figure 5.7: Šema idealnog transformatora

Idealni transformator nema mogućnost akumuliranja energije, pošto vrijedi:

$$
\begin{aligned}
w_m(t) &= v_1(t)i_1(t) + v_2(t)i_2(t) = v_1(t)\ [i_1(t) + \frac{n_1}{n_2} i_2(t)] \\
&= v_1(t)\ [i_1(t) - i_1(t)] = 0 \qquad (5.27)
\end{aligned}
$$

Idealni transformator ima osobinu preslikavanja impedanse. Kada se na sekundarni pristup idealnog transformatora priključi impedansa $Z = R$, kao što je prikazano na slici 5.8, ulazna impedansa na primarnom pristupu izračunava prema relacijama:

$$
\begin{aligned}
v_2 &= -Ri_2 \\
R_u &= \frac{v_1}{i_1} = \frac{(n_1/n_2)\ v_2}{-(n_2/n_1)\ i_2} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \left(\frac{v_2}{-i_2}\right) \\
&= \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 R \qquad (5.28)
\end{aligned}
$$

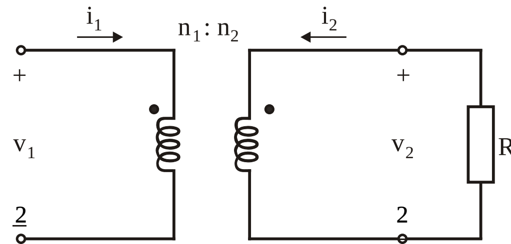


Figure 5.8: Ilustracija osobine preslikavanja idealnog transformatora

Dakle, idealni transformator transformiše (preslikava) otpor R, kojim je zatvoren sekundarni pristup, u otpor $(n_1/n_2)^2 R$ na primarnom pristupu.

Model idealnog transformatora može se koristiti za ekvivalentno predstavljanje spregnutih zavojnica L_1 i L_2, pomoću galvanski vezanih zavojnica L_a i L_b, kao što je prikazano u kolu na slici 5.9

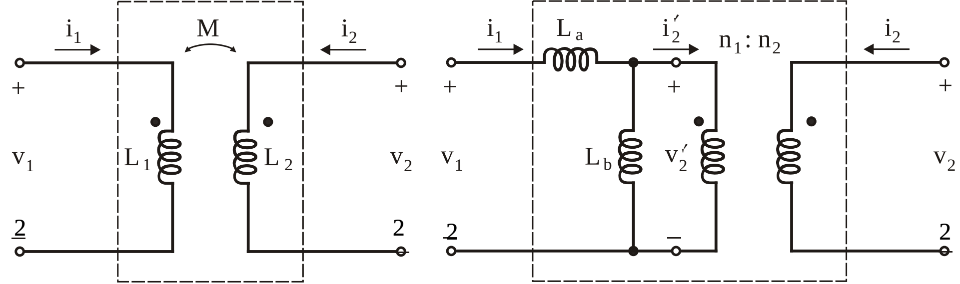


Figure 5.9: Ekvivalentno predstavljanje spregnutih zavojnica pomoću idealnog transformatora

Za usvojene referentne smjerove varijabli stanja u kolu na slici 5.9 jednačine stanja su:

- za idealni transformator:

$$\begin{aligned} \frac{v_2'}{v_2} &= \frac{n_1}{n_2} \\ \frac{i_2'}{i_2} &= -\frac{n_2}{n_1} \end{aligned}$$

- za zavojnice L_a i L_b:

$$\begin{aligned} v_1 &= L_a \frac{di_1}{dt} + L_b \frac{d(i_1 - i_2')}{dt} = (L_a + L_b)\frac{di_1}{dt} - L_b \frac{di_2'}{dt} \\ &= (L_a + L_b)\frac{di_1}{dt} + \left(\frac{n_2}{n_1}\right) L_b \frac{di_2}{dt} \\ v_2' &= \frac{n_1}{n_2}\, v_2 = L_b \frac{d(i_1 - i_2')}{dt} = L_b \frac{di_1}{dt} - L_b \frac{di_2'}{dt} \\ &= L_b \frac{di_1}{dt} + \left(\frac{n_2}{n_1}\right) L_b \frac{di_2}{dt} \end{aligned}$$

odakle slijedi:

$$v_2 = \left(\frac{n_2}{n_1}\right) L_b \frac{di_1}{dt} + \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 L_b \frac{di_2}{dt}$$

Tada vrijedi:

$$\begin{aligned} L_1 &= L_a + L_b \\ M &= \left(\frac{n_2}{n_1}\right) L_b \end{aligned}$$

$$L_2 = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 L_b$$

Odavde se jednostavno izvode relacije za izračunavanje parametara ekvivalentnog kola:

$$\begin{aligned}\frac{n_1}{n_2} &= \frac{M}{L_2}\\ L_b &= \frac{M^2}{L_2}\\ L_a &= \frac{L_1L_2 - M^2}{L_2}\end{aligned} \tag{5.29}$$

5.2 Zavisni generator kao element sa dva pristupa

Zavisni generatori se obično koriste pri modelovanju elektroničkih komponenti i sklopova. U sekciji 3.3 definisani su modeli zavisnih generatora, kao elemenati sa jednim pristupom. U ovoj sekciji zavisni generatori se predstavljaju pomoću modela elementa sa dva pristupa.

Na slici 5.10 prikazani su modeli sve četiri klase LVN zavisnih generatora:

- naponski kontrolisan naponski generator: $v_2 = \beta v_1$ i $i_1 = 0$
- strujno kontrolisan naponski generator: $v_2 = r_m i_1$ i $v_1 = 0$
- naponski kontrolisan strujni generator: $i_2 = g_m v_1$ i $i_1 = 0$
- strujno kontrolisan strujni generator: $i_2 = \alpha i_1$ i $v_1 = 0$

Zavisni generatori, kada su modelovani kao elementi sa dva pristupa, u primarnom pristupu sadrže granu, koja je otvorena ($i_1 = 0$) ili kratkospojena ($v_1 = 0$), dok u sekundarnom pristupu sadrže zavisni naponski ili strujni generator. Signal ovog generatora zavisi od napona ili struje na primarnom pristupu. Zato se zavisni generatori mogu klasifikovati kao spregnuti elementi sa dva pristupa.

Pošto su karakteristike zavisnih generatora linearne i modeli koji su prikazani na slici 5.10 pripadaju klasi LVN elemenata. Trenutna snaga koja se predaje zavisnom generatoru definisana je izrazom:

$$p(t) = v_1(t)i_1(t) + v_2(t)i_2(t) = v_2(t)i_2(t) \tag{5.30}$$

Tada se uslov pasivnosti zavisnih generatora izražava relacijom:

$$w(t) = \int_0^t v_2(\tau)i_2(\tau)\, d\tau \geq 0 \tag{5.31}$$

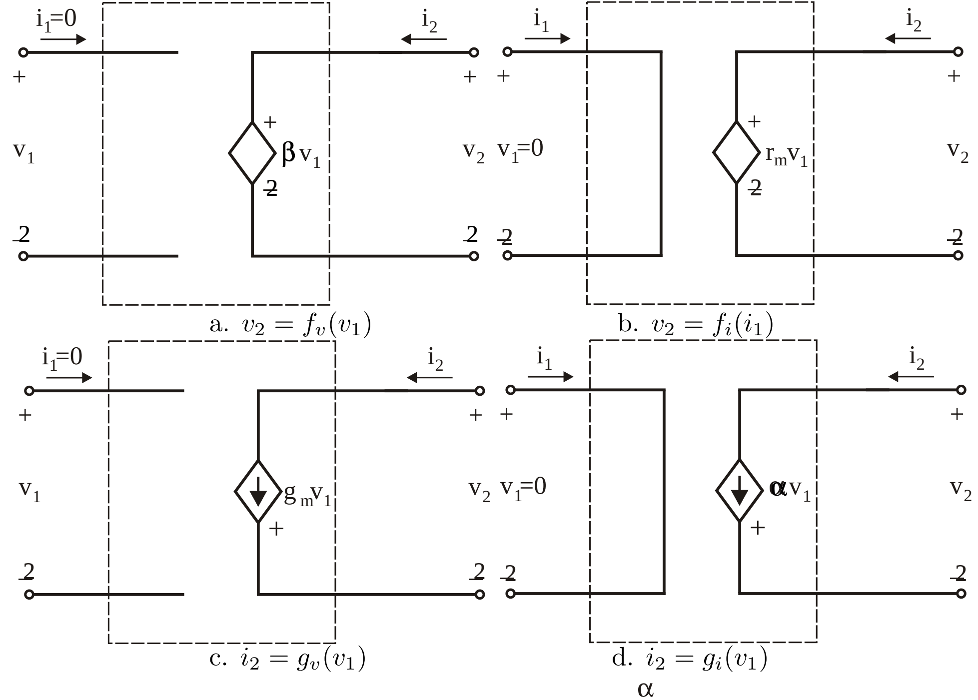


Figure 5.10: Modeli zavisnih generatora

Osobinu pasivnosti zavisnih generatora ilustrovaćemo na primjeru kola, prikazanog na slici 5.11, koje sadrži zavisni naponsko kontrolisan naponski generator. Za kolo, prikazano na slici 5.11, vrijede jednačine:

$$
\begin{aligned}
v_2(t) &= -i_2(t)R_2 \\
p(t) &= -i_2^2(t)R_2
\end{aligned}
$$

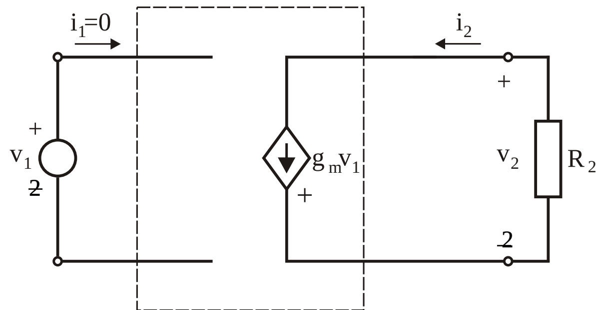


Figure 5.11: Zavisni generator kao aktivni element kola

Pošto je, za svaku vrijednost struje $i(t)$, snaga koja se predaje zavisnom generatoru negativna, slijedi da je zavisni generator u kolu sa slike 5.11 aktivni element, koji predaje energiju otporniku R_2 brzinom $R_2 i^2(t)$.

5.2.1 Pojačalo signala

Pojačalo je električno kolo koje ima sposobnost pojačavanja pobudnih signala. Realna fizička pojačala se obično realizuju pomoću elektroničkih sklopova. Osnovu modela pojačala čini zavisni generator, kojim se upravlja pobudnim signalom. Pojednostavljeni model naponskog pojačala prikazan je na slici 5.12.

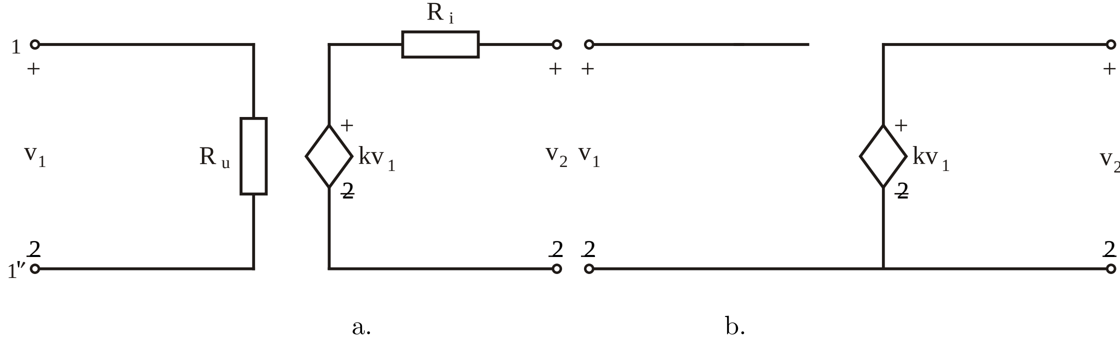


Figure 5.12: Model naponskog pojačala

Referentni čvorovi ulaznog napona $1'$ i izlaznog napona $2'$ obično čine zajednički referentni čvor, kao što je prikazano na slici 5.12.b Kada je sekundarna strana pojačala otvorena ($i_2 = 0$) napon na izlazu ima vrijednost:

$$v_{20} = kv_1$$

Konstanta $k \gg 0$ predstavlja faktor pojačanja u praznom hodu. Otpori R_u i R_i predstavljaju ulazni i izlazni otpor pojačala, respektivno. Za idealno naponsko pojačalo vrijedi $R_u = \infty$ i $R_i = 0$. Model idealnog naponskog pojačala prikazan je na slici 5.12.b.

Na slici 5.13 prikazano je kolo u kome je naponski generator, unutrašnjeg otpora R_g, priključen na pojačalo na čijim sekundarnim krajevima je spojen potrošač otpora R_p.

U kolu na slici 5.13 napon praznog hoda (za $i_2 = 0$) ima vrijednost:

$$v_{20} = kv_1 = k\frac{R_u}{R_g + R_u}v_g = k_1 v_g \tag{5.32}$$

To znači da je faktor pojačanja k_1 umanjen u odnosu na faktor pojačanja k sa koeficijentom $R_u/(R_g + R_u)$. U slučaju kada je priključen potrošač R_p napon v_2 ima vrijednost:

$$v_2 = kv_1\frac{R_p}{R_p + R_i} = k\frac{R_u}{R_g + R_u}\frac{R_p}{R_p + R_i}v_g = k_2 v_g \tag{5.33}$$

Prema tome, faktor pojačanja k dodatno se smanjuje uslijed uticaja otpora potrošača, prema koeficijentu $R_p/(R_p + R_i)$. Izraz 5.33 ukazuje da faktor pojačanja k_2 zavisi od vrijednosti unutrašnjeg otpora generatora R_g i otpora potrošača R_p.

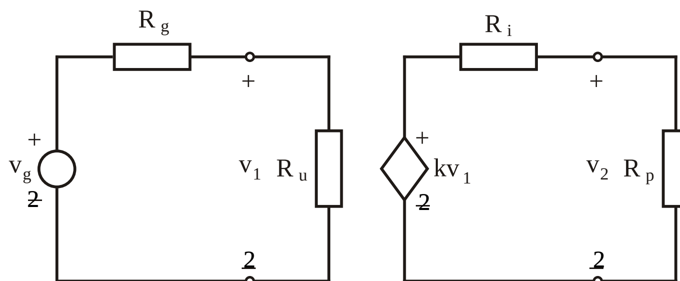


Figure 5.13: Naponski generator i potrošač priključeni na naponsko pojačalo

Na slici 5.14 prikazano je kolo koje sadrži idealno pojačalo, gdje je preko otpora R_2 napon na izlazu v_2 povezan sa ulaznom stranom pojačala. Ovakav spoj pojačala naziva se spoj sa povratnom spregom.

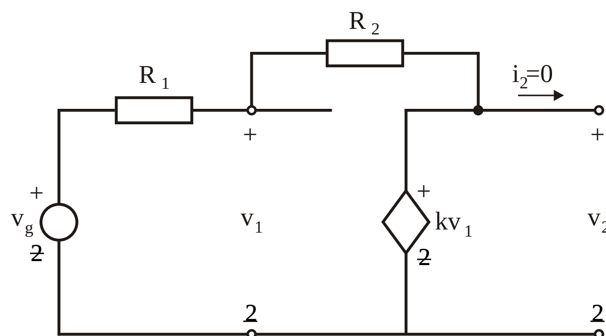


Figure 5.14: Pojačalo sa povratnom spregom

Za kolo sa slike 5.14 vrijede jednačine:

$$\begin{aligned} v_2 &= kv_1 \\ \frac{v_1 - v_g}{R_1} &= \frac{v_2 - v_1}{R_2} \end{aligned} \tag{5.34}$$

Odavde slijedi:

$$\frac{v_2}{v_g} = \frac{R_2 k}{R_2 + R_1 - R_1 k} = \left| b = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right| = (1-b)\frac{k}{1-bk} \tag{5.35}$$

Za slučaj $k \to \infty$, slijedi:

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \frac{v_2}{v_g} &= \lim_{k\to\infty} (1-b)\frac{k}{1-bk} = (1-b) \lim_{k\to\infty} \frac{k}{1-bk} \\ &= (1-b)\frac{1}{-b} = \frac{1 - \frac{R_1}{R_1+R_2}}{-\frac{R_1}{R_1+R_2}} = -\frac{R_2}{R_1} \end{aligned} \tag{5.36}$$

Dakle, faktor pojačanja u pojačalu sa povratnom spregom ne zavisi od koeficijenta k i može se kontrolisati izborom vrijednosti otpora R_1 i R_2.

5.2.2 Operaciono pojačalo

Operaciono pojačalo je elektronički sklop, čiji model je prikazan na slici 5.15, koji kada je priključen na vanjski istosmjerni napon $+V_{cc}$ i $-V_{cc}$ ima karakteristiku prikazana na slici 5.16.

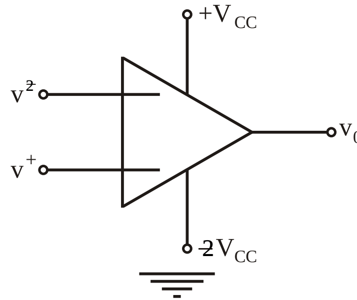


Figure 5.15: Model operacionog pojačala

Izlazni napon v_0 zavisi od napona $v_d = v^+ - v^-$. U lineranom dijelu karakteristike vrijedi $v_0 = A\,v_d$. Koeficijent pojačanja operacionih pojačala A ima velike vrijednosti ($A \approx 10^5$).

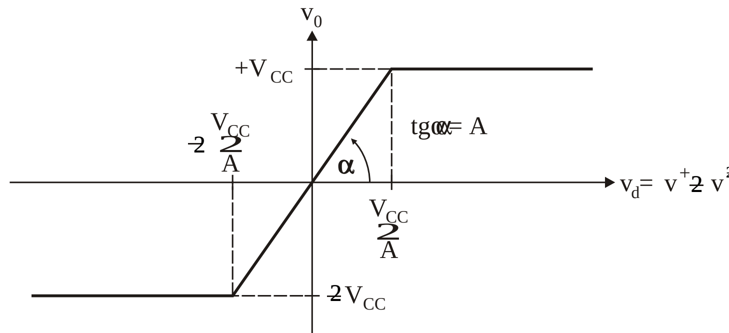


Figure 5.16: Karakteristika operacionog pojačala

Model idealnog pojačala (kada zanemarimo izvode za vanjsko napajanje), koji vrijedi u lineranom dijelu karakteristike, prikazan je na slici 5.17. U idealnom slučaju vrijedi $R_u = \infty$, $R_i = 0$ i $A = \infty$. To znači da se na izlazu pojačala pojavljuje signal v_0 i za jako male vrijednosti ulaznog napona v_d.

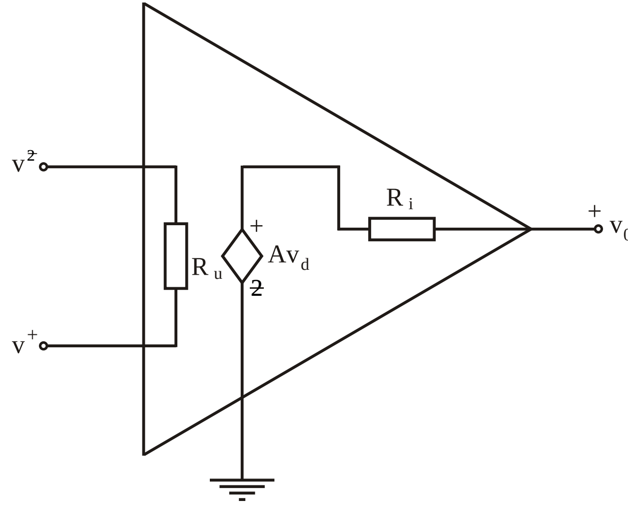


Figure 5.17: Model operacionog pojačala u linearnom dijelu karakteristike

Na slici 5.18 prikazano je kolo koje sadrži idealno operaciono pojačalo u spoju sa povratnom spregom.

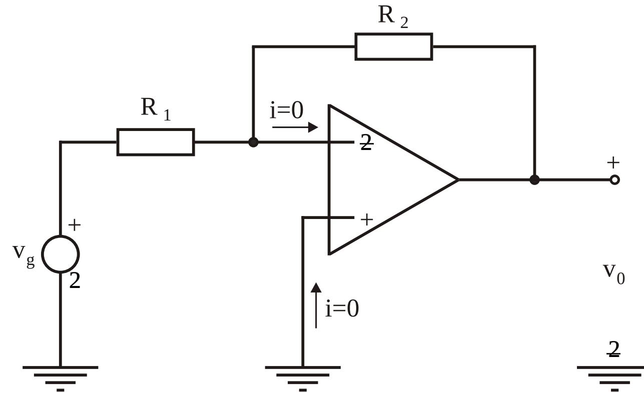


Figure 5.18: Idealno operaciono pojačalo u spoju sa povratnom spregom

Za kolo sa slike 5.18 vrijede jednačine:

$$\begin{aligned} \frac{v_g}{R_1} + \frac{v_0}{R_2} &= 0 \\ \frac{v_0}{v_g} &= -\frac{R_2}{R_1} \end{aligned} \tag{5.37}$$

Dakle, realni faktor pojačanja odredjen je odnosom otpora R_1/R_2.

5.3 Opšte jednačine elementa sa dva pristupa

Do sada smo opisali karakteristike pojedinih vrsta elemenata sa dva pristupa. U ovoj sekciji prikazaćemo karakteristike opšteg elementa sa dva pristupa (četiri kraja), koji se uobičajeno naziva četveropol. Na slici 5.19 prikazan je model opšteg elementa sa dva pristupa.

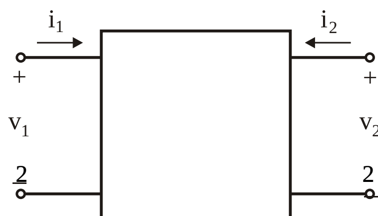


Figure 5.19: Model opšteg elementa sa dva pristupa

Za usvojene referentne smjerove napona pristupa v_1 i v_2 i struja pristupa i_1 i i_2, stanje LVN četveropola opisano je funkcijama:

$$\begin{aligned} v_1 &= f_1(i_1, i_2) \\ v_2 &= f_2(i_1, i_2) \end{aligned} \tag{5.38}$$

ili karakteristikama:

$$\begin{aligned} i_1 &= g_1(v_1, v_2) \\ i_2 &= g_2(v_1, v_2) \end{aligned} \tag{5.39}$$

Promjetimo da četveropoli pripadaju spregnutim elementima kola, pošto postoji zavisnost izmedju varijabli različitih pristupa. Općenito, za četiri varijable stanja v_1, v_2, i_1, i_1, moguće je definisati šest oblika funkcija (karakteristika) četveropola. Radi jednostavnijeg prikazivanja, oblik funkcija f i g i značenje parametara u pojedinim izrazima za karakteristike četveropola ilustrovaćemo, u nastavku ovog poglavlja, na primjeru modela stacionarnog stanja LVN četveropola, koji je priključen na pobudni signal sinusnog oblika.

5.3.1 z–parametri četveropola

Na slici 5.20 prikazano je stacionarno stanje četveropola pri djelovanju sinusnog pobudnog signala.

Jednačine stanja kola sa slike 5.20, napisane pomoću fazora napona i struja, imaju oblik:

$$\begin{aligned} \underline{V}_1 &= \underline{Z}_{11}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{12}\underline{I}_2 \\ \underline{V}_2 &= \underline{Z}_{21}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{22}\underline{I}_2 \end{aligned} \tag{5.40}$$

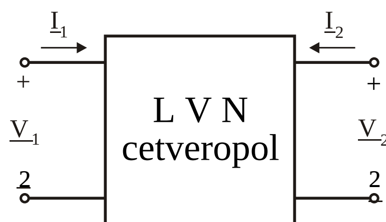


Figure 5.20: Stacionarno stanje LVN četveropola pri sinusnoj pobudi

ili u matričnoj formi:

$$\begin{bmatrix} \underline{V}_1 \\ \underline{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}$$

Dakle, matrična jednačina stanja četveropola ima oblik:

$$\underline{\mathbf{V}} = \underline{\mathbf{Z}}\,\underline{\mathbf{I}}$$

Elementi $\underline{Z}_{ij}$ matrice $\underline{\mathbf{Z}}$ imaju dimenzije impedansi i nazivaju se z–parametri četveropola. Značenje pojedinih elemenata se izvodi iz režima praznog hoda, tako da se z–parametri još nazivaju parametrima praznog hoda. Pojedini elementi matrice $\underline{\mathbf{Z}}$ imaju sljedeće fizičko značenje:

- $\underline{Z}_{11} = \left.\frac{\underline{V}_1}{\underline{I}_1}\right|_{I_2=0}$ - ulazna impedansa Z_{u1} primarne strane četveropola, u praznom hodu sekundarnih krajeva ($I_2 = 0$).
- $\underline{Z}_{12} = \left.\frac{\underline{V}_1}{\underline{I}_2}\right|_{I_1=0}$ - prenosna impedansa izmedju napona $\underline{V}_1$ i struje $\underline{I}_2$, u praznom hodu primarnih krajeva ($I_1 = 0$).
- $\underline{Z}_{21} = \left.\frac{\underline{V}_2}{\underline{I}_1}\right|_{I_2=0}$ - prenosna impedansa izmedju napona $\underline{V}_2$ i struje $\underline{I}_1$, u praznom hodu sekundarnih krajeva ($I_2 = 0$)
- $\underline{Z}_{22} = \left.\frac{\underline{V}_2}{\underline{I}_2}\right|_{I_2=0}$ - ulazna impedansa Z_{u2} sekundarne strane četveropola, u praznom hodu primarnih krajeva ($I_1 = 0$).

Ekvivalentna šema opšteg četveropola može se prikazati pomoću z–parametara. U kolu na slici 5.21, koje sadrži z–parametre, efekat sprezanja (zavisnosti) varijabli stanja različitih pristupa izražen je pomoću strujno kontrolisanih naponskih generatora, kod kojih je faktor zavisnosti izražen pomoću prenosnih impedansi $\underline{Z}_{12}$ i $\underline{Z}_{21}$.

Faktor naponskog pojačanja u praznom hodu $\left.\frac{\underline{V}_2}{\underline{V}_1}\right|_{I_2=0}$ može se izraziti pomoću odnosa z–parametara relacijom:

$$\left.\frac{\underline{V}_2}{\underline{V}_1}\right|_{I_2=0} = \left.\frac{\underline{V}_2}{\underline{I}_1}\right|_{I_2=0} \left.\frac{\underline{I}_1}{\underline{V}_1}\right|_{I_2=0} = \frac{\underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{11}}$$

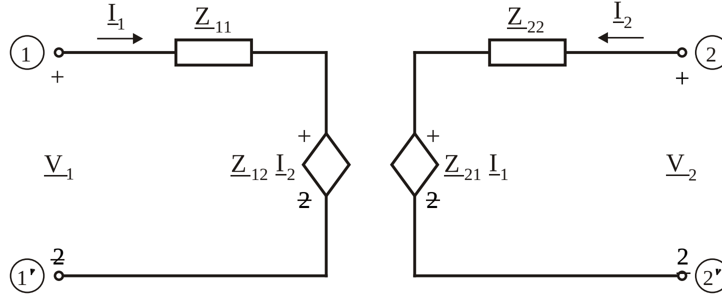


Figure 5.21: Ekvivalentna šema četveropola izvedena pomoću z–parametara

Analogno vrijedi:

$$\left.\frac{\underline{V}_{1}}{\underline{V}_{2}}\right|_{I_1=0} = \frac{\underline{Z}_{12}}{\underline{Z}_{22}}$$

Ukoliko su krajevi $1'$ i $2'$ identični, ekvivalentna šema četveropola ima oblik prikazan na slici 5.22.

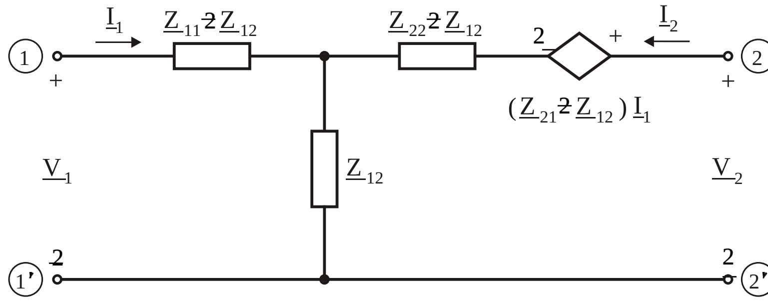


Figure 5.22: Ekvivalentna šema četveropola izvedena pomoću z–parametara

Ekvivalentna šema na slici 5.21 predstavlja opštiji model od šeme na slici 5.22. Šema na slici 5.22 ima oblik T–četveropola, pa se kolo na slici 5.22 naziva ekvivalentni T–četveropol.

Četveropoli za koje vrijedi $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21}$ imaju osobinu recipročnosti i klasifikuju se kao recipročni četveropoli. Osobina recipročnosti ilustrovana je na slici 5.23.

Ukoliko se na jednom pristupu recipročnog četveropola priključi strujni generator $\underline{I}$, napon praznog hoda $\underline{V}_0$ na drugom pristupu ima identičnu vrijednost, nezavisno od pristupa na kome je priključen strujni generator. Za kolo prikazano na slici 5.23 osobina recipročnosti je opisana relacijama:

$$\begin{aligned}
\underline{V}_{20}\big|_{I_2=0} &= \underline{V} = \underline{Z}_{21}\underline{I}_{1} = \underline{Z}_{21}\underline{I} \\
\underline{V}_{10}\big|_{I_1=0} &= \underline{V} = \underline{Z}_{12}\underline{I}_{2} = \underline{Z}_{12}\underline{I}
\end{aligned}$$

Iz prethodnih jednačina slijedi da za recipročne četveropole vrijedi $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21}$. Četveropoli koji sadrže nezavisne i/ili zavisne generatore nemaju osobinu reci-

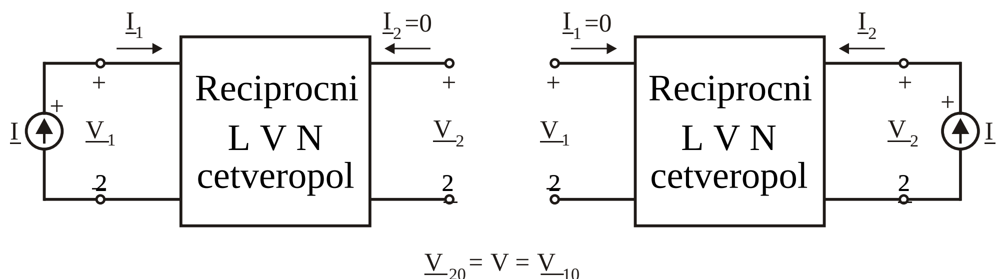


Figure 5.23: Ilustracija osobine recipročnosti četveropola

pročnosti. Četveropoli koji sadrže samo pasivne $RLCM$ elemente imaju osobinu recipročnosti i klasifikuju se kao recipročni, pasivni četveropoli. Recipročni četveropoli su jednoznačno definisani sa tri parametra ($\underline{Z}_{11}, \underline{Z}_{22}$ i $\underline{Z}_{12}$). Recipročni, pasivni četveropol se može prikazati pomoću ekvivalentnog pasivnog T–četveropola, koji je prikazan na slici 5.24.

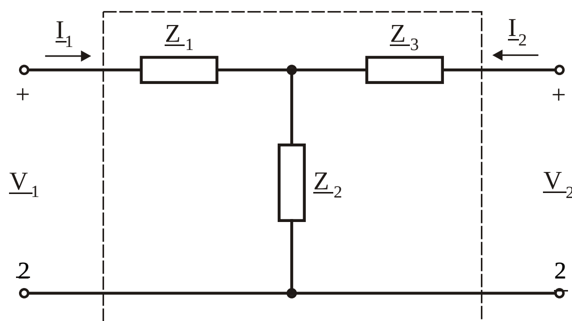


Figure 5.24: Ekvivalentna T–šema recipročnog četveropola

Odgovarajući z-parametri ekvivalentnog T–četveropola imaju vrijednosti:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{11} &= \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \\ \underline{Z}_{22} &= \underline{Z}_3 + \underline{Z}_2 \\ \underline{Z}_{12} &= \left.\frac{\underline{V}_1}{\underline{I}_2}\right|_{I_1=0} = \underline{Z}_2 \end{aligned} \tag{5.41}$$

Odavde slijedi:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_1 &= \underline{Z}_{11} - \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_2 &= \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_3 &= \underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{12} \end{aligned} \tag{5.42}$$

Prema tome, ekvivalentna T–šema sa slike 5.24 može se prikazati pomoću ekvivalentnog kola prikazanog na slici 5.25.

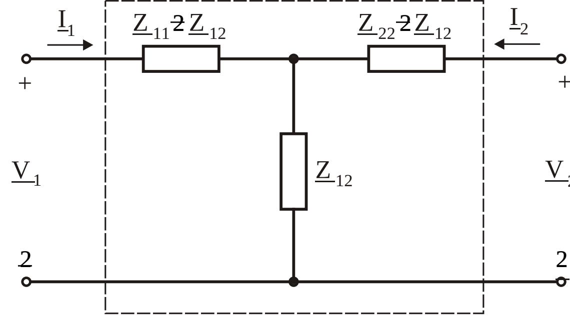


Figure 5.25: Ekvivalentna T–šema četveropola izvedena pomoću z–parametara

Šema prikazan na slici 5.25 može se direktno izvesti iz ekvivalentnog kola opšteg modela četveropola, koje je prikazano na slici 5.22, eliminacijom zavisnog naponskog generatora, pošto vrijedi $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21}$.

Recipročni četveropoli kod kojih vrijedi $\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_{22}$ nazivaju se simetrični četveropoli. U ekvivalentnoj T–šemi simetričnih četveropola vrijedi $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_3$. Dakle, simetrični četveropol jednoznačno je odredjen sa dva z–parametra.

Za pasivne LVN četveropole, z–parametri se mogu odrediti iz jednačina metoda napona čvorova. Za opšti četveropol, koji sadrži $N_n = n+1$ čvorova, jednačine čvorova, za referentni čvor $1' \equiv 2'$, imaju matrični oblik:

$$\underline{\mathbf{Y}}_n \underline{\mathbf{V}}_n = \underline{\mathbf{I}}_n$$

ili u skalarnoj formi:

$$\begin{aligned}
\underline{Y}_{11}\underline{V}_{n1} + \underline{Y}_{12}\underline{V}_{n2} + \cdots + \underline{Y}_{1n}\underline{V}_{nn} &= \underline{I}_1 \\
\underline{Y}_{21}\underline{V}_{n1} + \underline{Y}_{22}\underline{V}_{n2} + \cdots + \underline{Y}_{2n}\underline{V}_{nn} &= \underline{I}_2 \\
\underline{Y}_{31}\underline{V}_{n1} + \underline{Y}_{32}\underline{V}_{n2} + \cdots + \underline{Y}_{3n}\underline{V}_{nn} &= 0 \\
\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots &= \vdots \\
\underline{Y}_{n1}\underline{V}_{n1} + \underline{Y}_{n2}\underline{V}_{n2} + \cdots + \underline{Y}_{nn}\underline{V}_{nn} &= 0
\end{aligned}$$

Rješenje matrične jednačine čvorova za posmatrani četveropol ima oblik:

$$\underline{\mathbf{V}}_n = \underline{\mathbf{Y}}_n^{-1}\underline{\mathbf{I}}_n = \underline{\mathbf{Z}}_n \underline{\mathbf{I}}_n$$

Elementi matrice impedansi čvorova $\underline{\mathbf{Z}}_n$ izračunavaju se iz jednačine:

$$\begin{aligned}
\frac{\underline{\Delta}_{11}}{\underline{\Delta}}\underline{I}_1 + \frac{\underline{\Delta}_{21}}{\underline{\Delta}}\underline{I}_2 + \frac{\underline{\Delta}_{31}}{\underline{\Delta}}\,0 + \cdots + \frac{\underline{\Delta}_{n1}}{\underline{\Delta}}\,0 &= \underline{V}_{n1} \\
\frac{\underline{\Delta}_{12}}{\underline{\Delta}}\underline{I}_1 + \frac{\underline{\Delta}_{22}}{\underline{\Delta}}\underline{I}_2 + \frac{\underline{\Delta}_{32}}{\underline{\Delta}}\,0 + \cdots + \frac{\underline{\Delta}_{n2}}{\underline{\Delta}}\,0 &= \underline{V}_{n2}
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots & = & \cdots \\ \frac{\underline{\Delta}_{1n}}{\underline{\Delta}}\underline{I}_1 + \frac{\underline{\Delta}_{2n}}{\underline{\Delta}}\underline{I}_2 + \frac{\underline{\Delta}_{3n}}{\underline{\Delta}}0 + \cdots + \frac{\underline{\Delta}_{nn}}{\underline{\Delta}}0 & = & \underline{V}_{nn} \end{array}$$

Pošto vrijedi $\underline{V}_1 = \underline{V}_{n1}$ i $\underline{V}_2 = \underline{V}_{n2}$ slijedi:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{11} &= \frac{\underline{\Delta}_{11}}{\underline{\Delta}} \\ \underline{Z}_{22} &= \frac{\underline{\Delta}_{22}}{\underline{\Delta}} \\ \underline{Z}_{12} &= \frac{\underline{\Delta}_{21}}{\underline{\Delta}} \\ \underline{Z}_{21} &= \frac{\underline{\Delta}_{12}}{\underline{\Delta}} \end{aligned}$$

Kako je za pasivne četveropole matrica $\underline{\mathbf{Y}}_n$ simetrična vrijedi $\underline{\Delta}_{12} = \underline{\Delta}_{21}$, odakle je $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21}$.

5.3.2 y–parametri četveropola

Jednačine stanja LVN četveropola prikazanog na slici 5.20 imaju oblik:

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{Y}_{11}\underline{V}_1 + \underline{Y}_{12}\underline{V}_2 \\ \underline{I}_2 &= \underline{Y}_{21}\underline{V}_1 + \underline{Y}_{22}\underline{V}_2 \end{aligned} \tag{5.43}$$

ili u matričnom obliku:

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{V}_1 \\ \underline{V}_2 \end{bmatrix}$$

Dakle, matrična jednačina stanja ima oblik:

$$\underline{\mathbf{I}} = \underline{\mathbf{Y}}\,\underline{\mathbf{V}}$$

Elementi $\underline{Y}_{ij}$, matrice $\underline{\mathbf{Y}}$ imaju dimenzije admitansi i nazivaju se y–parametri četveropola. Značenje pojedinih elemenata izvodi se iz režima kratkog spoja, tako da se y–parametri još nazivaju parametrima kratkog spoja. Značenje elemenata matrice $\underline{\mathbf{Y}}$ je sljedeće:

- $\underline{Y}_{11} = \left.\frac{\underline{I}_1}{\underline{V}_1}\right|_{V_2=0}$ - ulazna admitansa Y_{u1} primarne strane četveropola, u kratkom spoju sekundarnih krajeva ($V_2 = 0$).
- $\underline{Y}_{12} = \left.\frac{\underline{I}_1}{\underline{V}_2}\right|_{V_1=0}$ - prenosna admitansa izmedju struje $\underline{I}_1$ i napona $\underline{V}_2$ u kratkom spoju primarnih krajeva ($V_1 = 0$).
- $\underline{Y}_{21} = \left.\frac{\underline{I}_2}{\underline{V}_1}\right|_{V_2=0}$ - prenosna admitansa izmedju struje $\underline{I}_2$ i napona $\underline{V}_1$ u kratkom spoju sekundarnih krajeva ($V_2 = 0$).

- $\underline{Y}_{22} = \left.\frac{\underline{I}_2}{\underline{V}_2}\right|_{V_1=0}$ - ulazna admitansa Y_{u2}, sekundarne strane četveropola, u kratkom spoju primarnih krajeva ($V_1 = 0$).

Ekvivalentna šema opšteg četveropola može se prikazati pomoću y–parametara. U kolu na slici 5.26, koje sadrži y–parametre, efekat sprezanja varijabli stanja različitih pristupa izražen je pomoću naponsko kontrolisanih strujnih generatora, koji imaju faktor zavisnosti izražen pomoću prenosnih admitansi $\underline{Y}_{12}$ i $\underline{Y}_{21}$.

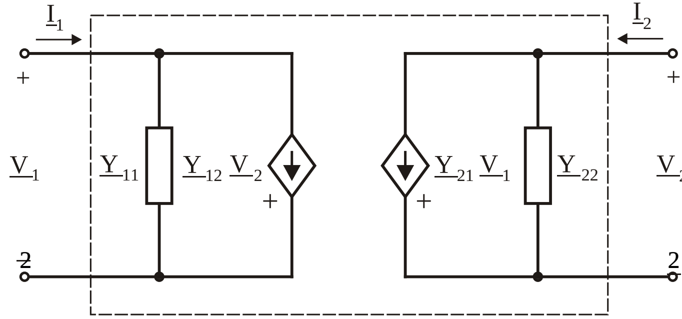


Figure 5.26: Ekvivalentna šema četveropola izvedena pomoću y–parametara

Faktor strujnog pojačanja u kratkom spoju $\left.\frac{-\underline{I}_2}{\underline{I}_1}\right|_{V_2=0}$ može se izraziti pomoću odnosa y-parametara relacijom:

$$\left.\frac{-\underline{I}_2}{\underline{I}_1}\right|_{V_2=0} = \left.\frac{-\underline{I}_2}{\underline{V}_1}\right|_{V_2=0} \left.\frac{\underline{V}_1}{\underline{I}_1}\right|_{V_2=0} = \frac{-\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{11}}$$

Analogno vrijedi:

$$\left.\frac{-\underline{I}_1}{\underline{I}_2}\right|_{V_1=0} = \frac{-\underline{Y}_{12}}{\underline{Y}_{22}}$$

Ukoliko su krajevi $1'$ i $2'$ identični, ekvivalentna T–šema četveropola ima oblik prikazan na slici 5.27.

Izmedju z–parametara i y–parametara postoji veza, koja je opisana matričnom jednačinom:

$$\begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ili:

$$[\underline{\mathbf{Z}}]\ [\underline{\mathbf{Y}}] = [U]$$

odnosno vrijedi:

$$[\underline{Z}] = [\underline{Y}]^{-1}$$
$$[\underline{Y}] = [\underline{Z}]^{-1}$$

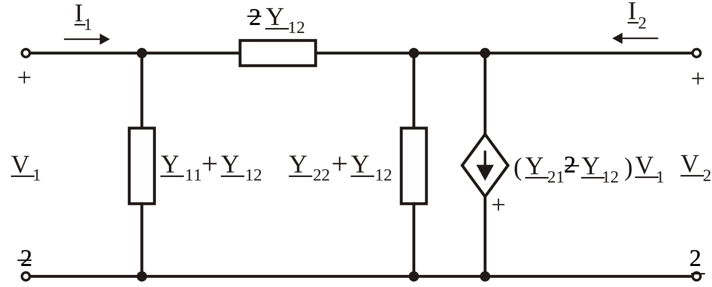


Figure 5.27: Ekvivalentna šema četveropola izvedena pomoću y–parametara

Prema tome vrijede sljedeće relacije:

$$\begin{aligned}
\underline{Z}_{11} &= \frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{\mathbf{\Delta}}_y} \\
\underline{Z}_{12} &= \frac{-\underline{Y}_{21}}{\underline{\mathbf{\Delta}}_y} \\
\underline{Z}_{21} &= \frac{-\underline{Y}_{12}}{\underline{\mathbf{\Delta}}_y} \\
\underline{Z}_{22} &= \frac{\underline{Y}_{11}}{\underline{\mathbf{\Delta}}_y}
\end{aligned} \tag{5.44}$$

gdje je:

$$\underline{\mathbf{\Delta}}_y = \underline{Y}_{11}\underline{Y}_{22} - \underline{Y}_{12}\underline{Y}_{21}$$

Takodje vrijedi:

$$\begin{aligned}
\underline{Y}_{11} &= \frac{\underline{Z}_{22}}{\underline{\mathbf{\Delta}}_z} \\
\underline{Y}_{12} &= \frac{-\underline{Z}_{21}}{\underline{\mathbf{\Delta}}_z} \\
\underline{Y}_{21} &= \frac{-\underline{Z}_{12}}{\underline{\mathbf{\Delta}}_z} \\
\underline{Y}_{22} &= \frac{\underline{Z}_{11}}{\underline{\mathbf{\Delta}}_z}
\end{aligned} \tag{5.45}$$

gdje je:

$$\underline{\mathbf{\Delta}}_z = \underline{Z}_{11}\underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{12}\underline{Z}_{21}$$

Za recipročne četveropole vrijedi $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21}$, odakle je $\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21}$. Dakle, recipročni četveropoli su jednoznačno definisani sa tri parametra ($\underline{Y}_{11}, \underline{Y}_{22}$ i $\underline{Y}_{12}$). Recipročni pasivni četveropol se može prikazati pomoću ekvivalentnog Π–četveropola, koji je prikazan na slici 5.28.a.

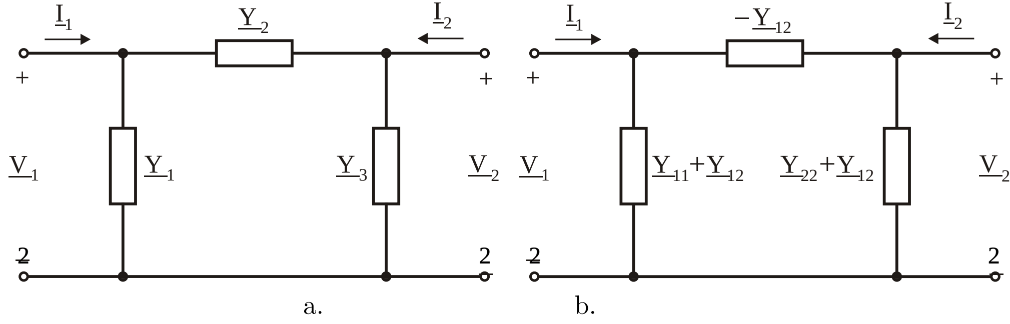


Figure 5.28: Ekvivalentne Π šeme recipročnog četveropola

Odgovarajući y–parametri ekvivalentnog Π–četveropola sa slike 5.28.a imaju vrijednosti:

$$
\begin{aligned}
\underline{Y}_{11} &= \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 \\
\underline{Y}_{22} &= \underline{Y}_3 + \underline{Y}_2 \\
\underline{Y}_{12} &= \left.\frac{\underline{I}_1}{\underline{V}_2}\right|_{V_1=0} = -\underline{Y}_2
\end{aligned}
$$

Tada se parametri ekvivalentnog Π–četveropola mogu izraziti preko y–parametara relacijama:

$$
\begin{aligned}
\underline{Y}_1 &= \underline{Y}_{11} - \underline{Y}_{12} \\
\underline{Y}_3 &= \underline{Y}_{22} - \underline{Y}_{12} \\
\underline{Y}_2 &= \underline{Y}_{12}
\end{aligned} \tag{5.46}
$$

Dakle, ekvivalentna Π šema sa slike 5.28.a može se prikazati pomoću ekvivalentnog kola prikazanog na slici 5.28.b. Šema prikazan na slici 5.28.b može se direktno izvesti iz ekvivalentnog kola opšteg modela četveropola, koje je prikazano na slici 5.27, eliminacijom zavisnog strujnog generatora, pošto vrijedi $\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21}$.

Kod simetričnih četveropola vrijedi $\underline{Y}_{11} = \underline{Y}_{22}$. Odatle za ekvivalentnu Π–šemu simetričnih četveropola vrijedi $\underline{Y}_1 = \underline{Y}_3$. Prema tome, simetrični četveropol jednoznačno je odredjen sa dva y–parametra.

Za pasivne LVN četveropole, y–parametri se mogu odrediti iz jednačina metoda konturnih struja. Za opšti četveropol, koji sadrži n kontura, numerišimo konture tako da vrijedi $\underline{J}_{k1} = \underline{I}_1$ i $\underline{J}_{k2} = \underline{I}_2$, odnosno $\underline{E}_{k1} = \underline{V}_1$ i $\underline{E}_{k2} = \underline{V}_2$. Tada jednačine kontura imaju matrični oblik:

$$\underline{\mathbf{Z}}_k \underline{\mathbf{J}}_k = \underline{\mathbf{E}}_k$$

ili u skalarnoj formi:

$$\begin{array}{lllll}
\underline{Z}_{11}\underline{I}_{1} & +\underline{Z}_{12}\underline{I}_{2} & +\cdots & +\underline{Z}_{1n}\underline{J}_{kn} & =\underline{V}_{1} \\
\underline{Z}_{21}\underline{I}_{1} & +\underline{Z}_{22}\underline{I}_{2} & +\cdots & +\underline{Z}_{2n}\underline{J}_{kn} & =\underline{V}_{2} \\
\underline{Z}_{31}\underline{J}_{k1} & +\underline{Z}_{32}\underline{J}_{k2} & +\cdots & +\underline{Z}_{3n}\underline{J}_{kn} & =0 \\
\cdots & +\cdots & +\cdots & +\cdots & =0 \\
\underline{Z}_{n1}\underline{I}_{n1} & +\underline{Z}_{n2}\underline{I}_{n2} & +\cdots & +\underline{Y}_{nn}\underline{I}_{nn} & =0
\end{array}$$

Rješenje jednačina kontura za četveropol tada možemo izraziti relacijom:

$$\underline{\mathbf{J}}_{k}=\underline{\mathbf{Z}}_{k}^{-1}\underline{\mathbf{E}}_{k}=\underline{\mathbf{Y}}_{k}\underline{\mathbf{E}}_{k}$$

Elementi matrice admitansi kontura $\underline{\mathbf{Y}}_{k}$ izračunavaju se iz jednačina:

$$\begin{array}{rcl}
\frac{\underline{\Delta}_{11}}{\underline{\boldsymbol{\Delta}}}\underline{V}_{1}+\frac{\underline{\Delta}_{21}}{\underline{\boldsymbol{\Delta}}}\underline{V}_{2}+\frac{\underline{\Delta}_{31}}{\underline{\boldsymbol{\Delta}}}0+\cdots+\frac{\underline{\Delta}_{n1}}{\underline{\boldsymbol{\Delta}}}0 & = & \underline{I}_{1} \\
\frac{\underline{\Delta}_{12}}{\underline{\boldsymbol{\Delta}}}\underline{V}_{1}+\frac{\underline{\Delta}_{22}}{\underline{\boldsymbol{\Delta}}}\underline{V}_{2}+\frac{\underline{\Delta}_{32}}{\underline{\boldsymbol{\Delta}}}0+\cdots+\frac{\underline{\Delta}_{n2}}{\underline{\boldsymbol{\Delta}}}0 & = & \underline{I}_{2} \\
\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots & = & \cdots \\
\frac{\underline{\Delta}_{1n}}{\underline{\boldsymbol{\Delta}}}\underline{V}_{1}+\frac{\underline{\Delta}_{2n}}{\underline{\boldsymbol{\Delta}}}\underline{V}_{2}+\frac{\underline{\Delta}_{3n}}{\underline{\boldsymbol{\Delta}}}0+\cdots+\frac{\underline{\Delta}_{nn}}{\underline{\boldsymbol{\Delta}}}0 & = & \underline{J}_{kn}
\end{array}$$

odakle slijedi:

$$\begin{array}{rcl}
\underline{Y}_{11} & = & \frac{\underline{\Delta}_{11}}{\underline{\boldsymbol{\Delta}}} \\
\underline{Y}_{22} & = & \frac{\underline{\Delta}_{22}}{\underline{\boldsymbol{\Delta}}} \\
\underline{Y}_{12} & = & \frac{\underline{\Delta}_{21}}{\underline{\boldsymbol{\Delta}}} \\
\underline{Y}_{21} & = & \frac{\underline{\Delta}_{12}}{\underline{\boldsymbol{\Delta}}}
\end{array}$$

Pošto je kod pasivnih četveropola matrica $\underline{\mathbf{Z}}_{k}$ simetrična vrijedi $\underline{\Delta}_{12}=\underline{\Delta}_{21}$, odnosno $\underline{Y}_{12}=\underline{Y}_{21}$.

5.3.3 Hibridni parametri četveropola

U prethodnim sekcijama izvedene su jednačine koje medjusobno povezuju vektore napona $\underline{\mathbf{V}}=[\underline{V}_{1},\underline{V}_{2}]^{T}$ i struja $\underline{\mathbf{I}}=[\underline{I}_{1},\underline{I}_{2}]^{T}$ pristupa četveropola. Neki fizički elementi najbolje se modeluju tako da se opišu jednačinama koje povezuju napone na jednom i struje na drugom pristupu. Jednačine koje povezuju napon $\underline{V}_{1}$ i struju $\underline{I}_{2}$ sa strujom $\underline{I}_{1}$ i naponom $\underline{V}_{2}$ imaju oblik:

$$\begin{array}{rcl}
\underline{V}_{1} & = & \underline{h}_{11}\underline{I}_{1}+\underline{h}_{12}\underline{V}_{2} \\
\underline{I}_{2} & = & \underline{h}_{21}\underline{I}_{1}+\underline{h}_{22}\underline{V}_{2}
\end{array} \qquad (5.47)$$

ili u matričnom obliku:

$$\begin{bmatrix} \underline{V}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{h}_{11} & \underline{h}_{12} \\ \underline{h}_{21} & \underline{h}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{V}_2 \end{bmatrix} = [\,\underline{\mathbf{h}}\,] \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{V}_2 \end{bmatrix}$$

Elementi matrice $\underline{h}_{ij}$ nazivaju se hibridni parametri, a matrica $[\,\underline{\mathbf{h}}\,]$ matrica hibridnih parametara. Pojedini elemenati matrice $[\,\underline{\mathbf{h}}\,]$ imaju sljedeće fizičko značenje:

- $\underline{h}_{11} = \left.\frac{\underline{V}_1}{\underline{I}_1}\right|_{V_2=0}$ - ulazna impedansa Z_{u1}, primarne strane četveropola u kratkom spoju sekundarnih krajeva ($V_2 = 0$).
- $\underline{h}_{12} = \left.\frac{\underline{V}_1}{\underline{V}_2}\right|_{I_1=0}$ - inverzni faktor naponskog pojačanja u praznom hodu primarnih krajeva ($I_1 = 0$).
- $\underline{h}_{21} = \left.\frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1}\right|_{V_2=0}$ - faktor strujnog pojačanja u kratkom spoju sekundarnih krajeva ($V_2 = 0$).
- $\underline{h}_{22} = \left.\frac{\underline{I}_2}{\underline{V}_2}\right|_{I_1=0}$ - ulazna admitansa Y_{u2}, sekundarne strane četveropola u praznom hodu primarnih krajeva ($I_1 = 0$).

Iz definicije hibridnih parametara slijedi da se oni mogu izraziti pomoću z–parametara i y–parametara. Iz izvedenih jednačina slijedi:

$$\begin{aligned}
\underline{h}_{11} &= \left.\frac{\underline{V}_1}{\underline{I}_1}\right|_{V_2=0} = \frac{\underline{\boldsymbol{\Delta}}_z}{\underline{Z}_{22}} = \frac{1}{\underline{Y}_{11}} \\
\underline{h}_{12} &= \left.\frac{\underline{V}_1}{\underline{V}_2}\right|_{I_1=0} = \left.\frac{\underline{V}_1/\underline{I}_2}{\underline{V}_2/\underline{I}_2}\right|_{I_1=0} = \frac{\underline{Z}_{12}}{\underline{Z}_{22}} = \frac{\frac{\underline{Y}_{12}}{\underline{\boldsymbol{\Delta}}_y}}{\frac{\underline{Y}_{11}}{\underline{\boldsymbol{\Delta}}_y}} = -\frac{\underline{Y}_{12}}{\underline{Y}_{11}} \\
\underline{h}_{21} &= \left.\frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1}\right|_{V_2=0} = \left.\frac{\underline{I}_2/\underline{I}_1}{\underline{I}_1/\underline{V}_1}\right|_{V_2=0} = \frac{\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{11}} = -\frac{\underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{22}} \\
\underline{h}_{22} &= \left.\frac{\underline{I}_2}{\underline{V}_2}\right|_{I_1=0} = \left.\frac{\underline{I}_2}{\underline{V}_2}\right|_{I_1=0} = \frac{1}{\underline{Z}_{22}} = \frac{\underline{\boldsymbol{\Delta}}_y}{\underline{Y}_{11}}
\end{aligned}$$

Determinanta $\underline{\boldsymbol{\Delta}}_h$ izražena pomoću z i y parametara ima vrijednost:

$$\begin{aligned}
\underline{\boldsymbol{\Delta}}_h &= \underline{h}_{11}\underline{h}_{22} - \underline{h}_{12}\underline{h}_{21} = \frac{\underline{\boldsymbol{\Delta}}_z - \underline{Z}_{12}(-\underline{Z}_{21})}{\underline{Z}^2_{22}} \\
&= \frac{\underline{Z}_{11}\underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{12}\underline{Z}_{21} + \underline{Z}_{12}\underline{Z}_{21}}{\underline{Z}^2_{22}} = \frac{\underline{Z}_{11}}{\underline{Z}_{22}}
\end{aligned}$$

odnosno:

$$\underline{\boldsymbol{\Delta}}_h = \frac{\underline{\boldsymbol{\Delta}}_y - (-\underline{Y}_{12})\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}^2_{11}} = \frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{11}}$$

Za recipročne četveropole za koje je $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21}$ vrijedi $\underline{h}_{12} = -\underline{h}_{21}$. Za simetrične četveropole vrijedi $\underline{Y}_{11} = \underline{Y}_{22}$ odnosno $\underline{\boldsymbol{\Delta}}_h = 1$.

Ekvivalentna šema opšteg četveropola može se prikazati pomoću h–parametara. U kolu na slici 5.29, koje sadrži h–parametre, efekat sprezanja varijabli stanja različitih pristupa izražen je pomoću naponski kontrolisanog naponskog generatora i strujno kontrolisanog strujnog generatora, koji imaju faktore zavisnosti izražene pomoću parametara $\underline{h}_{12}$ i $\underline{h}_{21}$.

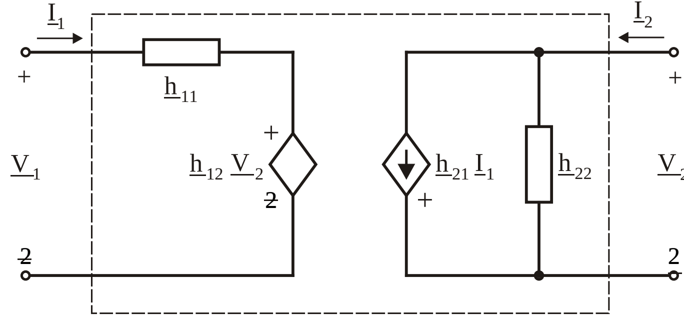


Figure 5.29: Ekvivalentna šema četveropola izvedena pomoću h-parametara

Jednačine 5.47 mogu se napisati i u obliku:

$$\underline{I}_1 = \underline{g}_{11}\underline{V}_1 + \underline{g}_{12}\underline{I}_2$$
$$\underline{V}_2 = \underline{g}_{21}\underline{V}_1 + \underline{g}_{22}\underline{I}_2$$

ili u matričnom obliku:

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{g}_{11} & \underline{g}_{12} \\ \underline{g}_{21} & \underline{g}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{V}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = [\,\underline{\mathbf{g}}\,] \begin{bmatrix} \underline{V}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = [\,\underline{\mathbf{h}}\,]^{-1} \begin{bmatrix} \underline{V}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}$$

Elementi matrice $\underline{g}_{ij}$ nazivaju se inverzni hibridni parametri, a matrica $[\,\underline{\mathbf{g}}\,]$ matrica inverznih hibridnih parmetara.

Parametri inverzne hibridne matrice $[\,\underline{\mathbf{g}}\,]$ definisani su relacijama:

- $\underline{g}_{11} = \left.\frac{\underline{I}_1}{\underline{V}_1}\right|_{I_2=0}$ - ulazna admitansa Y_{u1}, primarne strane četveropola u praznom hodu sekundarnih krajeva ($I_2 = 0$).
- $\underline{g}_{12} = \left.\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2}\right|_{V_1=0}$ - inverzni faktor strujnog pojačanja u kratkom spoju primarnih krajeva ($V_1 = 0$)
- $\underline{g}_{21} = \left.\frac{\underline{V}_2}{\underline{V}_1}\right|_{I_2=0}$ - faktor naponskog pojačanja u praznom hodu sekundarnih krajeva ($I_2 = 0$)
- $\underline{g}_{22} = \left.\frac{\underline{V}_2}{\underline{I}_2}\right|_{V_1=0}$ - ulazna admitansa Z_{u2}, sekundarne strane četveropola u kratkom spoju primarnih krajeva ($V_1 = 0$).

Veza izmedju g–parametara i h–parametara definisana je relacijama:

$$[\underline{\mathbf{h}}]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\underline{h}_{22}}{\underline{\mathbf{\Delta}}_h} & \frac{-\underline{h}_{12}}{\underline{\mathbf{\Delta}}_h} \\ \frac{-\underline{h}_{21}}{\underline{\mathbf{\Delta}}_h} & \frac{\underline{h}_{11}}{\underline{\mathbf{\Delta}}_h} \end{bmatrix} = [\underline{\mathbf{g}}] = \begin{bmatrix} \underline{g}_{11} & \underline{g}_{12} \\ \underline{g}_{21} & \underline{g}_{22} \end{bmatrix}$$

gdje je:

$$\underline{\mathbf{\Delta}}_h = \underline{h}_{11}\underline{h}_{22} - \underline{h}_{12}\underline{h}_{21}$$

Odnosno:

$$[\underline{\mathbf{g}}]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\underline{g}_{22}}{\underline{\mathbf{\Delta}}_g} & \frac{-\underline{g}_{12}}{\underline{\mathbf{\Delta}}_g} \\ \frac{-\underline{g}_{21}}{\underline{\mathbf{\Delta}}_g} & \frac{\underline{g}_{11}}{\underline{\mathbf{\Delta}}_g} \end{bmatrix} = [\underline{\mathbf{h}}] = \begin{bmatrix} \underline{h}_{11} & \underline{h}_{12} \\ \underline{h}_{21} & \underline{h}_{22} \end{bmatrix}$$

gdje je:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{\Delta}}_g &= \underline{g}_{11}\underline{g}_{22} - \underline{g}_{12}\underline{g}_{21} \\ &= \frac{\underline{h}_{11}\underline{h}_{22} - \underline{h}_{12}\underline{h}_{21}}{\underline{\mathbf{\Delta}}^2_h} = \frac{1}{\underline{\mathbf{\Delta}}_h} \end{aligned}$$

Za recipročne četveropole vrijedi $\underline{g}_{12} = -\underline{g}_{21}$, a za simetrične četveropole $\underline{\Delta}_g = 1$.

5.3.4 Prenosni parametri

Prilikom modelovanja fizičkih komponenti koje služe za prenos energije i signala, stanje četveropola je pogodno izraziti preko veze varijabli pristupa, pomoću izraza:

$$\begin{aligned} \underline{V}_1 &= f_v(\underline{V}_2, \underline{I}_2) \\ \underline{I}_1 &= f_i(\underline{V}_2, \underline{I}_2) \end{aligned}$$

Pošto prilikom prenosa signala struja na sekundarnom pristupu ima suprotan smjer od usvojenog u opštoj šemi, jednačine stanja LVN četveropola možemo pisati i u obliku:

$$\begin{bmatrix} \underline{V}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{a}_{11} & \underline{a}_{12} \\ \underline{a}_{21} & \underline{a}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{V}_2 \\ -\underline{I}_2 \end{bmatrix} = [\underline{a}] \begin{bmatrix} \underline{V}_2 \\ -\underline{I}_2 \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

Matrica $[\underline{\mathbf{a}}]$ se zove prenosna matrica i njeni koeficijenti se definisani relacijama:

- $\frac{1}{\underline{a}_{11}} = \left.\frac{\underline{V}_2}{\underline{V}_1}\right|_{\underline{I}_2=0}$ - faktor pojačanja napona u praznom hodu sekundarnih krajeva ($\underline{I}_2 = 0$).
- $\frac{-1}{\underline{a}_{12}} = \left.\frac{\underline{I}_2}{\underline{V}_1}\right|_{\underline{V}_2=0}$ - prenosna admitansa izmedju primarne struje i sekundarnog napona u kratkom spoju sekundarnih krajeva ($\underline{V}_2 = 0$)
- $\frac{1}{\underline{a}_{21}} = \left.\frac{\underline{V}_2}{\underline{I}_1}\right|_{\underline{I}_2=0}$ - prenosna impedansa izmedju sekundarnog napona i primarne struje u praznom hodu sekundarnih krajeva ($\underline{I}_2 = 0$)

- $\frac{-1}{\underline{a}_{22}} = \left.\frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1}\right|_{V_2=0}$ - faktor pojačanja struje u kratkom spoju sekundarnih krajeva ($V_2 = 0$).

Dakle, a–parametri četveropola mogu se odrediti iz režima praznog hoda ($I_2 = 0$) i kratkog spoja ($V_2 = 0$) sekundarnog pristupa.

Veza a–parametara i z–parametara jednostavno se izvodi iz jednačina četveropola:

$$\begin{aligned} \underline{V}_1 &= \underline{Z}_{11}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{12}\underline{I}_2 \\ \underline{V}_2 &= \underline{Z}_{21}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{22}\underline{I}_2 \end{aligned}$$

Rješavanjem druge jednačine po struji $\underline{I}_1$ izvodimo:

$$\underline{I}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_{21}}\underline{V}_2 - \frac{\underline{Z}_{22}}{\underline{Z}_{21}}\underline{I}_2$$

odakle substitucijom u prvu jednačinu:

$$\underline{V}_1 = \frac{\underline{Z}_{11}}{\underline{Z}_{21}}\underline{V}_2 - \left(\frac{\underline{Z}_{11}\underline{Z}_{22}}{\underline{Z}_{21}} - \underline{Z}_{12}\right)\underline{I}_2$$

nakon sredjivanja izraza dobijamo:

$$\begin{aligned} \underline{V}_1 &= \frac{\underline{Z}_{11}}{\underline{Z}_{21}}\underline{V}_2 + \frac{\underline{\mathbf{\Delta}}_z}{\underline{Z}_{21}}(-\underline{I}_2) \\ \underline{I}_1 &= \frac{1}{\underline{Z}_{21}}\underline{V}_2 + \frac{\underline{\mathbf{\Delta}}_z}{\underline{Z}_{21}}(-\underline{I}_2) \end{aligned}$$

Prema tome, veze a–parametara i z–parametara izražene su relacijama:

$$\begin{aligned} \underline{a}_{11} &= \frac{\underline{Z}_{11}}{\underline{Z}_{21}} \\ \underline{a}_{12} &= \frac{\underline{\mathbf{\Delta}}_z}{\underline{Z}_{21}} \\ \underline{a}_{21} &= \frac{1}{\underline{Z}_{21}} \\ \underline{a}_{22} &= \frac{\underline{Z}_{22}}{\underline{Z}_{21}} \end{aligned}$$

gdje je:

$$\underline{\mathbf{\Delta}}_z = \underline{Z}_{11}\underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{12}\underline{Z}_{21}$$

Odavde je:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{\Delta}}_a &= \underline{a}_{11}\underline{a}_{22} - \underline{a}_{12}\underline{a}_{21} \\ &= \frac{\underline{Z}_{11}\underline{Z}_{22} - \underline{\mathbf{\Delta}}_z}{\underline{Z}^2_{21}} = \frac{\underline{Z}_{12}}{\underline{Z}_{21}} \end{aligned}$$

Za recipročne četveropole, za koje je $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21}$, vrijedi:

$$\underline{\mathbf{\Delta}}_a = 1$$

a za simetrične četveropole, za koje je $\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_{22}$, slijedi:

$$\underline{a}_{11} = \underline{a}_{22}$$

Prenosni oblik jednačina četveropola može se izraziti i na sljedeći način:

$$\begin{bmatrix} \underline{V}_2 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{b}_{11} & \underline{b}_{12} \\ \underline{b}_{21} & \underline{b}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{V}_1 \\ -\underline{I}_1 \end{bmatrix} = [\,\underline{\mathbf{b}}\,] \begin{bmatrix} \underline{V}_1 \\ -\underline{I}_1 \end{bmatrix} \tag{5.49}$$

ili u skalarnoj formi:

$$\begin{aligned} \underline{V}_2 &= \underline{b}_{11}\underline{V}_1 - \underline{b}_{12}\underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 &= \underline{b}_{21}\underline{V}_1 - \underline{b}_{22}\underline{I}_1 \end{aligned} \tag{5.50}$$

Polazeći od jednačine:

$$\begin{bmatrix} \underline{V}_2 \\ -\underline{I}_2 \end{bmatrix} = [\underline{\mathbf{a}}]^{-1} \begin{bmatrix} \underline{V}_1 \\ -\underline{I}_1 \end{bmatrix}$$

nakon sredjivanja izraza dobijamo vezu prenosnih b–parametara i a–parametara:

- $\underline{b}_{11} = \left.\frac{\underline{V}_2}{\underline{V}_1}\right|_{I_1=0} = \frac{\underline{a}_{22}}{\underline{\Delta}_a}$ - faktor pojačanja napona u praznom hodu primarnih krajeva ($I_1 = 0$).
- $\underline{b}_{12} = \left.\frac{\underline{V}_2}{-\underline{I}_1}\right|_{V_1=0} = \frac{\underline{a}_{12}}{\underline{\Delta}_a}$ - prenosna impedansa izmedju sekundarnog napona i primarne struje u kratkom spoju primarnih krajeva ($V_1 = 0$)
- $\underline{b}_{21} = \left.\frac{\underline{I}_2}{\underline{V}_1}\right|_{I_1=0} = \frac{\underline{a}_{21}}{\underline{\Delta}_a}$ - prenosna admitansa izmedju sekundarne struje i primarnog napona u praznom hodu primarnih krajeva ($I_1 = 0$)
- $\underline{b}_{22} = \left.\frac{\underline{I}_2}{-\underline{I}_1}\right|_{V_1=0}$ - faktor pojačanja struje u kratkom spoju primarnih krajeva ($V_1 = 0$).

Uočimo da zbog usvojenih smjerova struja I_1 i I_2 vrijedi:

$$[b] \neq [a]^{-1}$$

Za b–parametre vrijedi:

$$\underline{\mathbf{\Delta}}_b = \frac{\underline{a}_{11}\underline{a}_{22} - \underline{a}_{12}\underline{a}_{21}}{\underline{\mathbf{\Delta}}_a^2} = \frac{1}{\underline{\mathbf{\Delta}}_a}$$

Odavde za recipročne mreže, za koje je $\underline{\mathbf{\Delta}}_a = 1$, vrijedi $\underline{\mathbf{\Delta}}_b = 1$. Za simetrične mreže, za koje je $\underline{a}_{12} = \underline{a}_{21}$, vrijedi $\underline{b}_{12} = \underline{b}_{21}$.

Medjusobni odnosi i definicije svih parametara cetveropola prikazani su u tabeli 5.1.

+++ ubaciti tabelu o vezama cetveropola (str 749) +++

5.3.5 Vezivanje četveropola

Četveropoli se vezuju u paralelnu, rednu i kaskadnu vezu. Kao i kod elemenata sa jednim pristupom, ekvivalentni parametri za svaki tip veze odredjuju se na osnovi jednačina četveropola i jednačina koje opisuju vezu. U ovoj sekciji izvesti ćemo relacije za izračunavanje ekvivalentnih parametara karakterističnih tipova veza. Radi jednostavnijeg označavanja, fazore napona i struja pristupa pisati ćemo bez oznake fazora.

Paralelna veza četveropola

Na slici 5.30 prikazana je paralelna veza četveropola, koja je opisana relacijama:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V'_1 \\ V'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V''_1 \\ V''_2 \end{bmatrix}$$

i

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I'_1 \\ I'_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I''_1 \\ I''_2 \end{bmatrix}$$

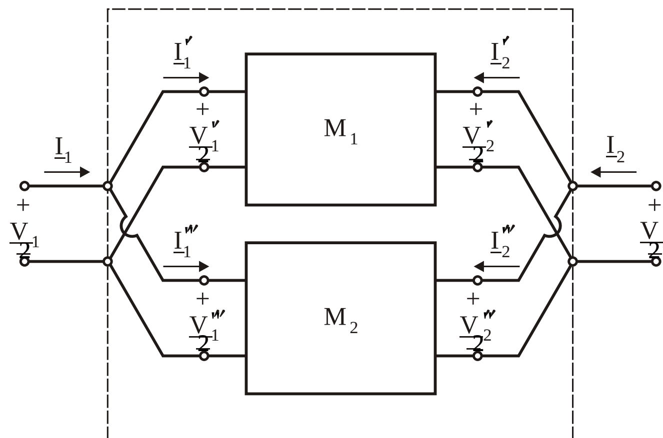


Figure 5.30: Paralelna veza četveropola

Za paralelnu vezu četveropola vrijedi:

- naponi na ulazu i izlazu paralelne veze jednaki su naponima na ulazu ($V_1 = V'_1 = V''_1$) i izlaza ($V_2 = V'_2 = V''_2$) vezanih četveropola.
- struje na ulazu i izlazu paralelne veze jednaki su zbiru ulaznih ($I_1 = I'_1 + I''_1$) i izlaznih ($I_2 = I'_2 + I''_2$) struja vezanih četveropola.

Test za regularnost paralelne veze četveropola izvodi se iz uslova "da se naponi na pristupima na oba četveropola nisu promijenili poslije paralelnog vezivanja". Test regularnosti paralelne veze četveropola izvodi se prema šemama na slici 5.31 i glasi:

$$\begin{aligned} V_{ab} &= 0 \\ V_{cd} &= 0 \end{aligned}$$

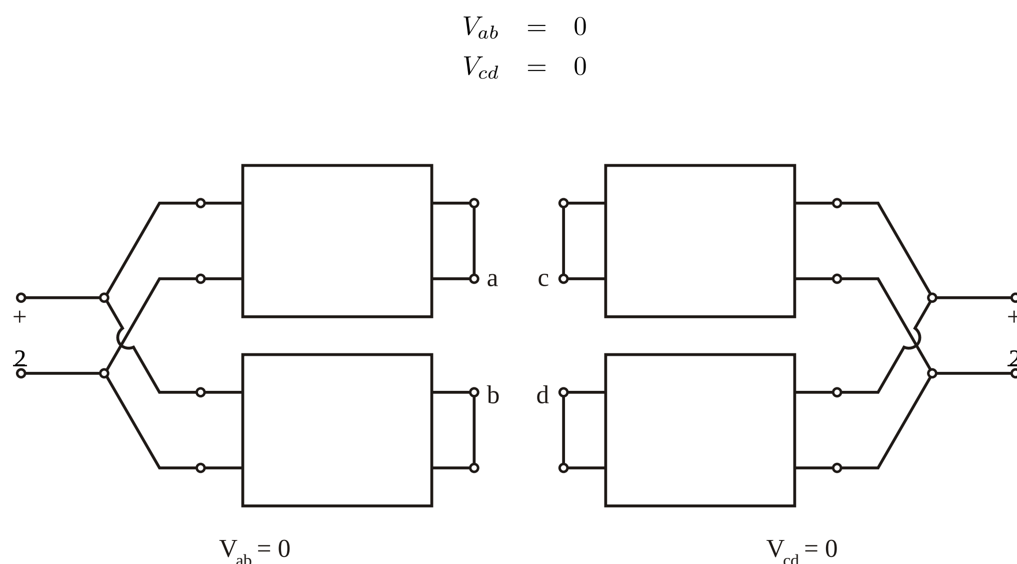


Figure 5.31: Test regularnosti paralelene veze četveropola

Parametri ekvivalentnog četveropola za paralelnu vezu jednostavno se odredju-ju ukoliko jednačine četveropola izraze pomoći y–parametara:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = [\,\mathbf{Y}\,] \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

odnosno:

$$\begin{bmatrix} I'_1 \\ I'_2 \end{bmatrix} = [\,\mathbf{Y}'\,] \begin{bmatrix} V'_1 \\ V'_2 \end{bmatrix}$$

i

$$\begin{bmatrix} I''_1 \\ I''_2 \end{bmatrix} = [\,\mathbf{Y}''\,] \begin{bmatrix} V''_1 \\ V''_2 \end{bmatrix}$$

Tada na osnovu jednačina koje opisuju paralelnu vezu četveropola izvodimo sljedeće relacije:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I'_1 \\ I'_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I''_1 \\ I''_2 \end{bmatrix} = [\; Y' \;] \begin{bmatrix} V'_1 \\ V'_2 \end{bmatrix} + [\; Y'' \;] \begin{bmatrix} V''_1 \\ V''_2 \end{bmatrix} \\ &= \{ [\,\mathbf{Y}'\,] + [\,\mathbf{Y}''\,] \} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

odakle slijedi:

$$[\,\mathbf{Y}\,] = [\,\mathbf{Y}'\,] + [\,\mathbf{Y}''\,] \tag{5.51}$$

Prema tome y–parametri paralelne veze četveropola jednaki su zbiru y–parametara vezanih četveropola.

Redna veza četveropola

Na slici 5.32 prikazana je redna veza četveropola, koja je opisana relacijama:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I'_1 \\ I'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I''_1 \\ I''_2 \end{bmatrix}$$

i

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V'_1 \\ V'_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V''_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

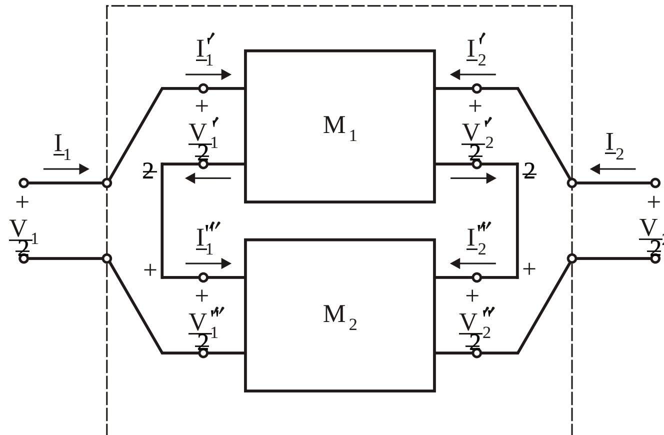


Figure 5.32: Redna veza četveropola

Za rednu vezu četveropola vrijedi:

- struje na ulazu I_1 i izlazu I_2 redne veze jednake su strujama ulaza ($I_1 = I'_1 = I''_1$) i izlaza ($I_2 = I'_2 + I''_2$) vezanih četveropola, respektivno.

- naponi na ulazu V_1 i izlazu V_2 redne veze jednaki su zbiru ulaznih ($V_1 = {V'}_1 + {V''}_1$) i izlaznih ($V_2 = {V'}_2 + {V''}_2$) napona vezanih četveropola, respektivno.

Uslov za regularnost serijske veze glasi: napon izmedju tačaka a i b, pri raspojenom izlaznom kraju veze, mora biti jednak nuli, kao i napon izmedju tačaka c i d, pri raspojenom ulaznom kraju veze. Test regularnosti izvodimo prema šemama prikazanim na slici 5.33 prema relacijama:

$$\begin{aligned} V_{ab} &= 0 \\ V_{cd} &= 0 \end{aligned}$$

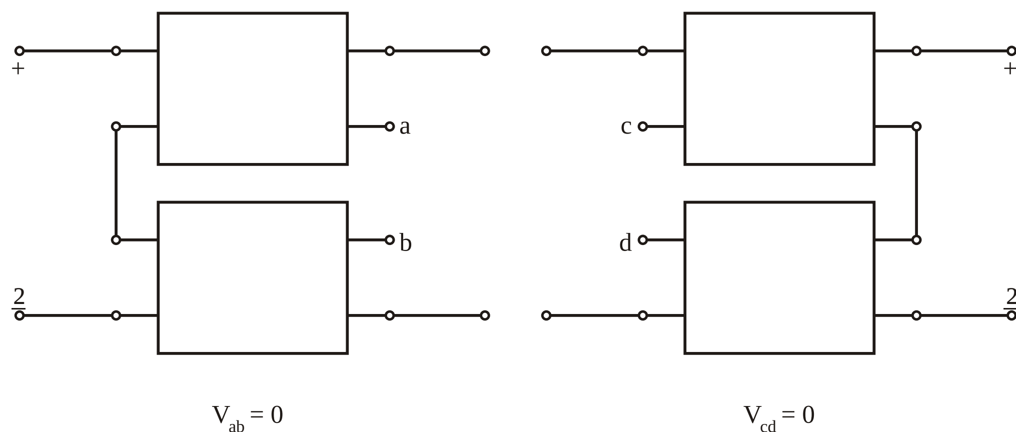


Figure 5.33: Test regularnosti redne veze četveropola

Parametri ekvivalentne veze jednostavno se odredjuju ukoliko se jednačine četveropola izraze pomoći z–parametara:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = [\ \mathbf{Z}\ ] \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

odnosno:

$$\begin{bmatrix} V'_1 \\ V'_2 \end{bmatrix} = [\ \mathbf{Z}'\ ] \begin{bmatrix} I'_1 \\ I'_2 \end{bmatrix}$$

i

$$\begin{bmatrix} V''_1 \\ V''_2 \end{bmatrix} = [\ \mathbf{Z}''\ ] \begin{bmatrix} I''_1 \\ I''_2 \end{bmatrix}$$

Tada na osnovu jednačina koje opisuju rednu vezu četveropola izvodimo sljedeće relacije:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} V'_1 \\ V'_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V''_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = [\ \mathbf{Z}'\ ] \begin{bmatrix} {I'}_1 \\ {I'}_2 \end{bmatrix} + [\ \mathbf{Z}''\ ] \begin{bmatrix} {I''}_1 \\ {I''}_2 \end{bmatrix} \\ &= \{ [\mathbf{Z}'] + [\mathbf{Z}''] \} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

odakle slijedi:

$$\left[\ \mathbf{Z}\ \right] = \left[\ \mathbf{Z}'\ \right]\left[\ \mathbf{Z}''\ \right] \tag{5.52}$$

Prema tome z–parametri redne veze četveropola jednaki su zbiru z–parametara vezanih četveropola.

Kaskadna veza četveropola

Na slici 5.34 prikazana je kaskadna veza četveropola, koja je opisana relacijama:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V'_1 \\ I'_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V''_2 \\ -I''_2 \end{bmatrix}$$

i relacijom koja opisuje vezu četveropola:

$$\begin{bmatrix} V'_2 \\ -I'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V''_1 \\ I''_1 \end{bmatrix}$$

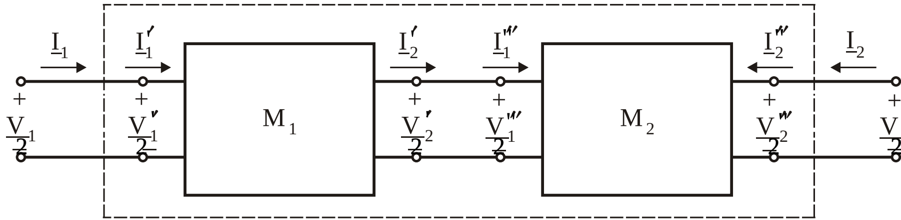


Figure 5.34: Kaskadna veza četveropola

Za kaskadnu vezu četveropola vrijedi:

- ulazni pristup prvog četveropola je ulazni pristup kaskadne veze,
- izlazni pristup drugog četveropola je izlazni pristup kaskadne veze,
- izlazni pristup prvog četveropola je ulazni pristup drugog četveropola.

Parametre ekvivalentne veze jednostavno odredjujemo na osnovu jednačina koje opisuju kaskadnu vezu, kada jednačine četveropola izrazimo pomoći a–parametara:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} V'_1 \\ I'_1 \end{bmatrix} = \left[\ \mathbf{a}'\ \right]\begin{bmatrix} V'_2 \\ -I'_2 \end{bmatrix} = \left[\ \mathbf{a}'\ \right]\begin{bmatrix} V''_1 \\ I''_1 \end{bmatrix} \\ &= \left[\ \mathbf{a}'\ \right]\left[\ \mathbf{a}''\ \right]\begin{bmatrix} V''_2 \\ -I''_2 \end{bmatrix} = \left[\ \mathbf{a}\ \right]\begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

odakle slijedi:

$$[\ \mathbf{a}\ ] = [\ \mathbf{a}'\ ]\ [\ \mathbf{a}''\ ] \tag{5.53}$$

Dakle, matrica a–parametara kaskadne veze jednaka je proizvodu matrica a–parametara vezanih četveropola, odnosno vrijedi $[\mathbf{a}] = [\mathbf{a}'][\mathbf{a}'']$.

5.3.6 Opšti model četveropola

Analogno sa opštim modelom elementa kola sa jednim pristupom, definiše se i opšti model elementa sa dva pristupa (četveropola), koji je prikazan na slici 5.35.

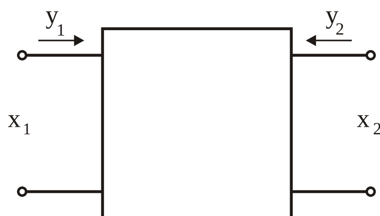


Figure 5.35: Opšti model elementa sa dva pristupa

Stanje elementa sa dva pristupa jednoznačno je opisano u svakom trenutku vremena t sa dvije podužne varijable x_1 i x_2 i dvije poprečne varijable y_1 i y_2. Za četveropole koji sadrže samo LVI pasivne elemente vrijedi:

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2) \end{aligned} \tag{5.54}$$

gdje su f_1 i f_2 linearne funkcije.

Trenutna snaga koja se predaje četveropolu izražena je relacijom:

$$p(t) = x_1(t)y_1(t) = x_2(t)y_2(t) \tag{5.55}$$

Chapter 6

Grafovi električnih mreža

Koncept električnog kola sa koncentrisanim parametrima i metodi rješavanja, koji su definisani u osnovama elektrotehnika, izvedeni su za kola proste strukture. U teoriji električnih kola, na osnovu sistemskog pristupa, izvode se *metodi i tehnike rješavanja kola* proizvoljne složenosti. Uobičajeno se kola velike složenosti nazivaju električnim mrežama. Zbog obimnosti matematičkih operacija, rješavanje složenih električnih mreža moguće je jedino provesti korištenjem digitalnih računara. Pri tome se koriste tehnike modelovanja i rješavanja električnih mreža koje su zasnovane na *matričnim modelima.* Matrični modeli mreža se definišu na osnovu koncepta *geometrijskih mreža ili mrežnih grafova.* Koncept mrežnog grafa predstavlja osnovu teorije grafova (*topologije mreža)*, koji omogućava modelovanje i rješavanje električnih mreža pomoću matričnih postupaka uz korištenje digitalnih računara.

U ovom poglavlju definisani su koncept i osnovni pojmovi mrežnih grafova, izvedene su različite forme matričnih jednačina Kirhofovih zakona te definisan koncept dualnih grafova.

6.1 Definicija i model mrežnog grafa

Koncept *mrežnog grafa* definiše se za električne mreže sa koncentrisanim parametrima i vrijedi za sve klase kola. Pomoću grafova simbolički se opisuju ograničenja koja na struje i napone grana mreže nameću Kirhofovi zakoni za struje (KZS) i za napone (KZN). Pošto Kirhofovi zakoni vrijede za sve vrste karakteristika elemenata kola, mrežni grafovi predstavljaju apstrakciju kola, koja opisuje njegovu geometrijsku strukturu - *topologiju.* Zbog toga se mrežni grafovi nazivaju i *geometrijske mreže.*

Postupak formiranja grafa ilustrovaćemo na primjerima prostih kola, prikazanih na slici 6.1, na kojoj je prikazan postupak formiranja grafova G_1 i G_2.

Sa slike 6.1 lako je uočiti da se postupak formiranja grafa G zasniva na zamjeni grana u mreži M sa linijskim segmentima, koji se nazivaju *granama grafa.* Pri

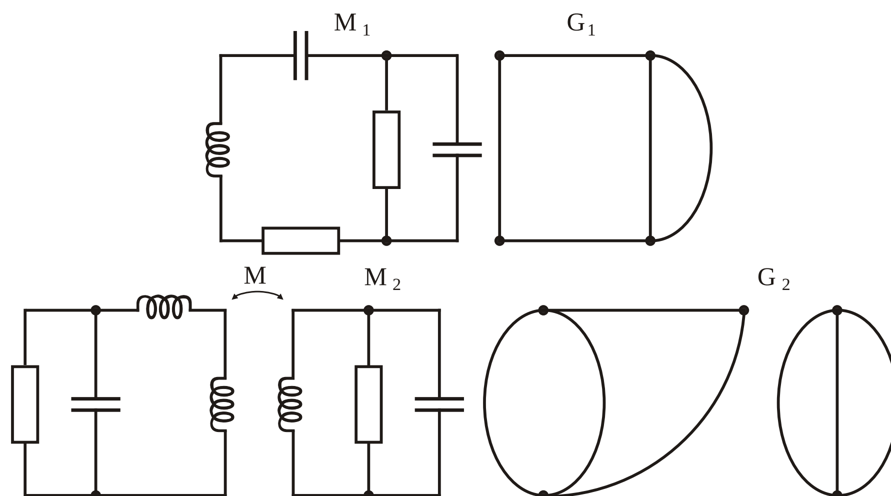


Figure 6.1: Ilustracija postupka formiranja grafa

tome se mjesta gdje se spajaju dvije ili više grana grafa označavaju tačkama i nazivaju *čvorovima grafa*. Primjetimo da u grafu G_2 nije naznačena magnetska sprega M, pošto magnetsko sprezanje zavojnica nije osobina strukture mreže nego karakteristika spregnutih elemenata. Dakle, graf je *geometrijski model mreže*, čiji je matematički model predstavljen pomoću skupova pridruženih grana i čvorova. Pri tome se svaka grana na oba kraja završava u jednom od čvorova. Na slici 6.2 prikazani su neki specijalni slučajevi grafova.

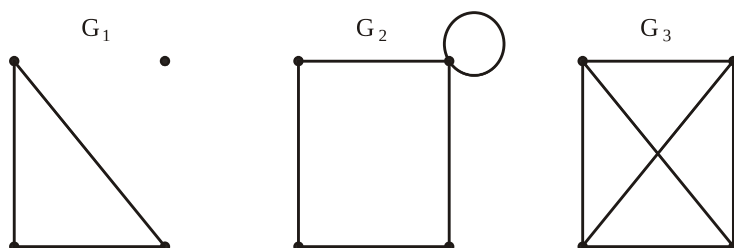


Figure 6.2: Specijalni slučajevi grafova

Analizom specijalnih slučajeva, prikazanih na slici 6.2, moguće je definisati karakteristike grafova. Na slici 6.2 graf G_1 sadrži izolovani čvor, koji nije povezan niti sa jednom granom. Ovakav graf se naziva *nepovezani graf*. Analogno, graf kod koga su svi čvorovi povezani naziva se *povezani graf*. Graf G_2 sadrži granu koja ima identičan početni i završni čvor. Za ovakav graf se kaže da sadrži petlju koju čini jedna grana, odosno da sadrži *sopstvenu petlju*. Graf G_3 sadrži grane koje se u planarnoj projekciji ukrštaju, ali mjesto ukrštanja ne predstavlja čvor. Za grafove koji u planarnoj projekciji ne sadrže grane koje se ukrštaju kaže se da

imaju osobinu planarnosti. Ovakvi grafovi nazivaju se *planarni grafovi.* U ovoj knjizi predmet analize su planarni grafovi, koji ne sadrže sopstvene petlje.

Posebna klasa grafova su *subgrafovi.* Za graf G_1 kažemo da je subgraf grafa G ukoliko svaki čvor i svaka grana subgrafa G_1 pripada i grafu G. Drugim riječima subgraf G_1 grafa G formira se izdvajanjem pojedinih grana i čvorova iz grafa G. Na slici 6.3. prikazano je nekoliko subgrafova grafa G.

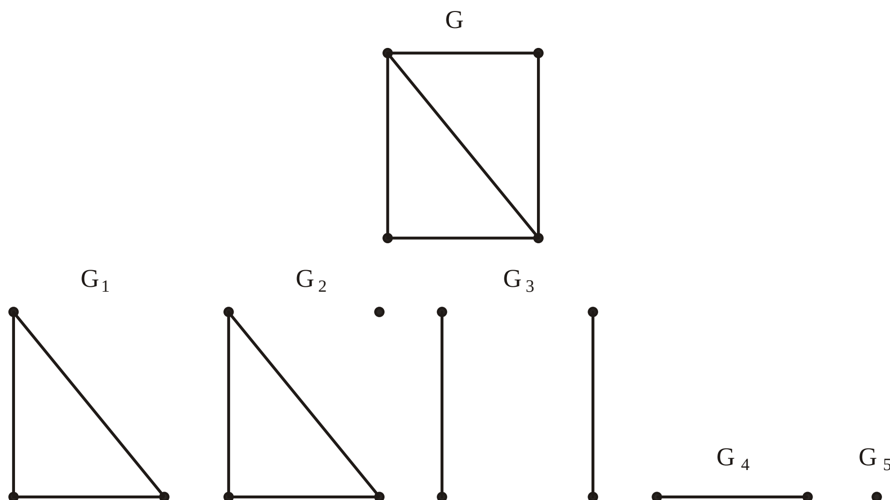


Figure 6.3: Ilustracija formiranja subgrafova

Primjetimo da subgraf G_5 sadrži samo jedan čvor i niti jednu granu. Ovakvi grafovi nazivaju se *degenerisani grafovi.* Posebno važan subgraf predstavlja subgraf *put.* Put je subgraf koji sadrži sukcesivno povezane grane izmedju dva čvora. Ukoliko se pri formiranju subrafa put, grane i čvorovi mreže mogu uključiti samo jednom, put je *prost put.* Ako se neka grana ili čvor mreže može uključiti više puta, subgraf put je *složen put.*

Kirhofovi zakoni su definisani za poznate smjerove napona i struja grana kola. Postupak definisanja *referentnih smjerova varijabli stanja grana* mreže odgovara usvajanju referentnih smjerova grana u grafu. Pri tome se pretpostavlja da su smjerovi napona i struja grana *usaglašeni*, odnosno da struja grane ima pozitivan smjer ukoliko izlazi iz tačke (pridruženog čvora) višeg potencijala i završava u tački (pridruženom čvoru) nižeg potencijala. Za označavanje usaglašenih smjerova napona i struja grana dovoljno je na grafu označiti referentni smjer jedne veličine, obično struje grane. Graf na kome su naznačeni smjerovi grana (koji odredjuju smjerove struja), naziva se *orjentisani graf.* Uobičajeno se na orjentisanom grafu numerišu čvorovi i grane. Numeracije čvorova se označavaju sa brojem unutar kruga. Na slici 6.4 prikazan je orjentisani graf G_1 za mrežu M_1 sa prikazanom numeracijom čvorova i grana.

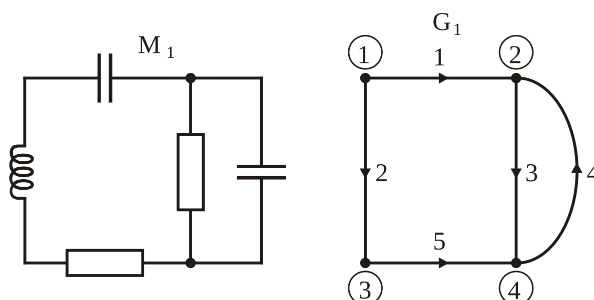


Figure 6.4: Orjentisani graf mreže M_1, sa slike 6.1.a

Orjentisani graf definiše odnose izmedju skupova čvorova i pridruženih orjentisanih grana. Pri tome svaka grana k polazi iz pridruženog polaznog čvora i, a završava u pridruženom završnom čvoru j. Na primjer, grana 1 polazi iz čvora 1 a završava u čvoru 2. Za granu 1 i pridružene čvorove 1 i 2 kažemo da su *incidentni.*

Matematički model orjentisanog grafa predstavlja *matrica incidencije čvorova i grana*, koja opisuje veze čvorova i grana orjentisanog grafa. Matrica incidencije, koja opisuju veze svih čvorova grafa, označava se sa $\mathbf{A}_0$ i naziva se *potpuna matrica incidencije.* Matrica $\mathbf{A}_0$ ima dimenzije $(N_n \times N_l)$ gdje su:

- N_n - broj čvorova grafa
- N_l - broj grana grafa

Elementi a_{ik} potpune matrice incidencije $\mathbf{A}_0$ definišu se relacijom:

$$a_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{ukoliko grana } k \text{ izlazi iz čvora } i \\ -1, & \text{ukoliko grana } k \text{ završava u čvoru } i \\ 0, & \text{ako grana } k \text{ i čvor } i \text{ nisu incidentni} \end{cases}$$

Za orjentisani graf sa slike 6.4 matrica $\mathbf{A}_0$ ima oblik:

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Pošto svaka grana polazi iz jednog i završava u drugom čvoru, svaka kolona matrice $\mathbf{A}_0$ sadrži po jedan element 1 i jedan element -1, dok su svi ostali elementi kolone jednaki 0. Odavde se izvodi osobina potpune matrice incidencije čvorova:

Zbir elemenata u svakoj koloni potpune matrice incidencije $\mathbf{A}_0$ *jednak je nuli.*

6.2 Matrične jednačine Kirhofovih zakona

U ovom poglavlju izveden je matrični oblik jednačina Kirhofovih zakona za struje (KZS) i za napone (KZN), koristeći potpunu matricu incidencije $\mathbf{A}_0$.

Prema KZS, za svaki čvor k mreže M možemo napisati jednačinu:

$$\sum_{j \in k} i_j(t) = 0, \ \ j = 1, 2..., N_l \tag{6.1}$$

Simbol $\sum_{j \in k}$ označava algebarsku sumu struja grana j koje su povezane (incidentne) sa čvorom k. Pri tome se usvaja da struja i_j ima predznak:

- $(+)$ ukoliko struja i_j izlazi iz čvora k
- $(-)$ ukoliko struja i_j ulazi u čvor k.

Kada se za sve čvorove mreže M napišu jednačine prema KZS dobija se sistem N_n homogenih algebarskih jednačina, koje sadrže N_l varijabli stanja, struja grana. Jednačine prema KZS za kolo prikazano na slici 6.4, za usvojene referentne smjerove i numeraciju kao na orjentisanom grafu G, imaju oblik:

$$\begin{array}{lr} 1 & i_1 + i_2 = 0 \\ 2 & -i_1 + i_3 - i_4 = 0 \\ 3 & -i_2 + i_5 = 0 \\ 4 & -i_3 + i_4 - i_5 = 0 \end{array} \tag{6.2}$$

Posmatranjem jednačina 6.2 možemo zaključiti da se predznaci za struje grana mogu odrediti na osnovu koeficijenata matrice $\mathbf{A}_0$. Naime, jednačine 6.2 možemo napisati u matričnoj formi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{bmatrix} = 0 \tag{6.3}$$

ili kao matričnu jednačinu:

$$\mathbf{A}_0 \mathbf{i} = 0 \tag{6.4}$$

Vektor kolona $\mathbf{i} = [i_1, i_2, \cdots, i_{N_l}]^T$ predstavlja vektor *struja grana.*

Jednačine 6.1 predstavljaju sistem linearno zavisnih jednačina, pošto vrijedi:

$$\sum_{j=1}^{N_l} \sum_{j \in k} i_j = 0 \tag{6.5}$$

U izrazu 6.5 struja svake grane javlja se dva puta: jednom kao i_j, kada struja izlazi iz incidentnog (polaznog) čvora, i drugi puta kao $-i_j$, kada struja ulazi u incidentni (završni) čvor. Tako se u sumi ($\sum_{j=1}^{N_l} \sum_{j \in k} i_j$) svaka struja poništava, čime se

dokazuje jednakost 6.5. Jednakost 6.5 može se jednostavno dokazati korištenjem matričnog oblika jednačina 6.4. U matričnoj formi struja i_j se množi sa koeficijentima iz j–te kolone matrice $\mathbf{A}_0$. Pošto je suma koeficijenata u svakoj koloni matrice $\mathbf{A}_0$ jednaka nuli, vrijedi gore izvedena jednakost 6.5.

Sistem jednačina 6.1 transformiše se u sistem linearno nezavisnih jednačina tako da se jednačina prema KZS eliminiše za proizvoljno izabrani čvor, koji se naziva *referentni čvor*. Uobičajeno se eliminiše jednačina za čvor N_n. Dakle prema KZS moguće je napisati $N_n - 1 = n$ nezavisnih algebarskih jednačina koje sadrže N_l struja grana kao varijabli. Ukoliko se kao referentni čvor usvoji čvor N_n tada redukovani sistem jednačina prema KZS, za kolo sa slike 6.4, ima oblik:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{bmatrix} = 0$$

ili u matričnoj formi:

$$\mathbf{A}\mathbf{i} = 0 \tag{6.6}$$

Matrica $\mathbf{A}$ naziva se *redukovana matrica incidencije čvorova* ili skraćeno *matrica incidencije čvorova* $\mathbf{A}$. Matrica $\mathbf{A}$ jednostavno se dobija eliminacijom reda matrice $\mathbf{A}_0$ koji odgovara referentnom čvoru N_n. Dakle, dimenzije matrice incidencije $\mathbf{A}$ su $(n \times N_l)$. Pošto za povezane grafove vrijedi $N_l > n$, matrica $\mathbf{A}$ ima n–ti red.

U osnovama elektrotehnike, prilikom izvodjenja metoda napona čvorova, definisan je pojam *napona čvora*. Za svaki čvor $k = 1, 2, \ldots, n$ definiše se napon čvora v_{nk}, kao razlika potencijala izmedju čvora k i referentnog čvora N_n. Vektor kolona napona čvorova $\mathbf{v}_n = [v_{n1}, v_{n2}, \ldots, v_{nn}]^T$ jednoznačno odredjuje napone grana mreže v_j, za $j = 1, 2, \ldots, N_l$. Naime, prema KZN napon čvora k (v_{nk}) može se izraziti kao algebarska suma napona grana na putu izmedju čvora k i referentnog čvora N_n. Pri tome izabrani put može biti proizvoljan. Pošto je $N_l > n$ pri rješavanju jednačina mreže poželjno je napone grana $\mathbf{v}$ dimenzija $(N_l \times 1)$ izraziti preko napona čvorova $\mathbf{v}_n$ dimenzija $(n \times 1)$. Jedna od mogućnosti je da vezu vektora $\mathbf{v}$ i $\mathbf{v}_n$ izrazimo pomoću matrice incidencije $\mathbf{A}$, što odgovara korištenju prostih putevi pri povezivanju čvorova. Tada jednačina prema KZN ima oblik:

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}^T \mathbf{v}_n \tag{6.7}$$

Za kolo prikazano na slici 6.4 relacija 6.7 ima oblik:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_3 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{n1} \\ v_{n2} \\ v_{n3} \end{bmatrix}$$

Posmatranjem redova matrice $\mathbf{A}^T$ uočavamo da postoje dvije vrste grana: grane koje su direktno povezane (incidentne) sa referentnim čvorom, i grane koje nisu incidentne sa referentnim čvorom. Za prvu grupu grana, napon grane v_k jednak je naponu njenog incidentnog čvora v_{ni} (za $i \neq N_n$), ukoliko je čvor i polazni čvor grane k, odnosno njegovoj negativnoj vrijednosti $-v_{ni}$, kada je čvor i završni čvor grane k. Za kolo prikazano na slici 6.4 za grane koje su incidentne sa referentnim čvorom 4 vrijedi:

$$\begin{aligned} v_3 &= v_{n2} \\ v_4 &= -v_{n2} \\ v_5 &= v_{n3} \end{aligned}$$

Za granu koja nije incidentna sa referentnim čvorom, napon grane v_k, koja ima polazni čvor i i završni čvor j, izražavamo preko napona incidentnih čvorova relacijom:

$$v_k = v_{ni} - v_{nj}$$

Tako za kolo sa slike 6.4 vrijedi:

$$\begin{aligned} v_1 &= v_{n1} - v_{n2} \\ v_2 &= v_{n1} - v_{n3} \end{aligned}$$

Prema tome, KZN izražavaju vezu izmedju napona grana $\mathbf{v}$ i napona čvorova $\mathbf{v}_n$. Ako jednačinu $\mathbf{v} = \mathbf{A}^T\mathbf{v}_n$ napišemo u obliku $\mathbf{v} = \mathbf{D}\mathbf{v}_n$, elemente matrice $\mathbf{D}$ dimenzija $(N_l \times n)$ možemo odrediti direktno, posmatranjem orjentisanog grafa mreže M, prema sljedećem pravilu:

$$d_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{ukoliko grana } k \text{ izlazi iz incidentnog čvora } j \\ -1, & \text{ukoliko grana } k \text{ završava u incidentnom čvoru } j \\ 0, & \text{ako grana } k \text{ i čvor } j \text{ nisu incidentni} \end{cases}$$

6.3 Subgraf presjek i KZS

U prethodnom poglavlju KZS su definisani za čvorove mreže. KZS za svaki čvor $k = 1, 2, \ldots, N_n$ mreže M, definišu balans struja grana i_j koje su povezane sa čvorom k, u svakom trenutku vremena t. Balans struja čvora k baziran je na fizičkom principu balansa količina naelektrisanja koje ulaze u čvor, uz pretpostavku da unutar čvora nema nagomilavanja naelektrisanja. Analogno, polazeći od principa balansa struja grana u čvorovima mreže, pretpostavimo da ovaj princip važi i za struje grana, koje ulaze u zatvorenu Gausovu površinu, prikazanu na slici 6.5.

Gausova površina dijeli skup čvorova na unutrašnje, koji se nalaze unutar površine, i vanjske, koji su izvan površine. Pretpostavimo da je prema KZS suma struja grana i_j, koje ulaze u Gausovu površinu, jednaka nuli. U ovom slučaju KZS definišu balans količine naelektrisanja unutar Gausove površine. Da bismo dokazali ovu intuitivnu pretpostavku koristićemo koncept *subgrafa presjek* grafa G.

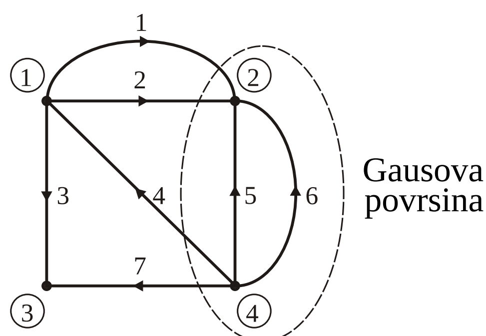


Figure 6.5: Gausova površina i koncept subgrafa presjek

Za povezani graf G subgraf presjek čine grane grafa, čijim izdvajanjem se graf G dijeli na dva nepovezana dijela. Za graf G prikazan na slici 6.5 izdvajanjem grana 1, 2, 4 i 7, koje presijecaju Gausovu površinu i čine subgraf presjek, graf se dijeli na dva nepovezana dijela, koji su prikazani na slici 6.6.

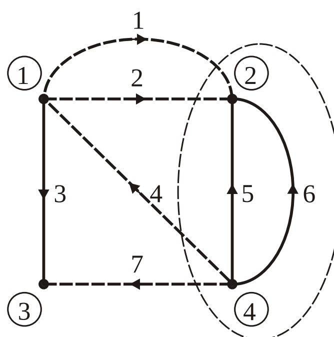


Figure 6.6: Subgraf presjek grafa G

Da bismo izveli jednačinu prema KZS za grane subgrafa presjek moramo definisati pozitivan referentni smjer presjeka. Za presjek na slici 6.5 usvojimo kao pozitivan, referentni smjer koji izlazi iz presjeka. Za ovaj referentni smjer u jednačinama KZS struje i_4 i i_7 imaju pozitivan, a struje i_1 i i_2 negativan predznak. Tada

jednačina za presjek, prema KZS ima oblik:

$$-i_1 - i_2 + i_4 + i_7 = 0 \tag{6.8}$$

Dokažimo da jednačina 6.8 vrijedi i da izražava KZS za grane subgrafa presjek. Ako za sve čvorove u unutrašnjosti Gausove površine (čvorovi 2 i 4) napišemo jednačine za čvorove prema KZS dobijamo:

$$\begin{aligned} -i_1 - i_2 - i_5 - i_6 &= 0 \\ i_4 + i_5 + i_6 + i_7 &= 0 \end{aligned}$$

Sumiranjem jednačina prema KZS za čvorove 2 i 4 dobijamo jednačinu:

$$-i_1 - i_2 + i_4 + i_7 = 0$$

što predstavlja jednačinu 6.8 prema KZS za grane presjeka. Time smo dokazali usvojenu pretpostavku.

Jednačine prema KZS za struje grana presjeka predstavljaju linearne, homogene algebarske jednačine sa konstantnim koeficijentima. Pošto za čvorove mreže prema KZS možemo napisati $N_n - 1$ nezavisnu jednačinu, za struje grana za presjeke mreže takodje možemo prema KZS napisati $N_n - 1$ nezavisnu jednačinu. Postupak izbora presjeka grafa G, za koje su jednačine prema KZS linearno nezavisne, opisan je u poglavlju 7.

6.4 Subgraf kontura i KZN

Jednačine prema KZN u osnovama elektrotehnike se izražavaju za izabrane konture mreže. Pri tome je kontura mreže definisana kao skup sukcesivno povezanih grana, od kojih prva polazi a zadnja završava u istom čvoru mreže. U teoriji grafova *kontura mreže* se definiše kao subgraf grafa G koga čine grane zatvorenog puta, tako da je svaki čvor incidentan (povezan) samo sa dvije grane. To znači da se na izabranom zatvorenom putu kroz svaki čvor prolazi samo jednom, odnosno da je put prost. Za kolo sa slike 6.5, subgraf kontura I, koju čine grane 1, 4 i 5 prikazana je isprekidanom linijom na slici 6.7.

Prema KZN za svaku konturu grafa G algebarska suma napona grana konture jednaka je nuli. Prema tome, jednačine KZN izražavaju balans napona grana zatvorenog (prostog) puta. Predznaci napona grana u algebarskoj sumi odredjuju se u odnosu na usvojeni pozitivni referentni smjer konture. Ako se smjerovi grana i konture poklapaju predznak napona je pozitivan, a za suprotne smjerove predznak je negativan. Za konturu I jednačina prema KZN ima oblik:

$$v_1 + v_4 - v_5 = 0 \tag{6.9}$$

Jednačine KZN napisane za konture grafa G imaju formu linearnih, homogenih algebarskih jednačina sa realnim konstantnim koeficijentima. Postupak izvodjenja sistema linearno nezavisnih jednačina za konture mreže opisan je poglavlju 7.

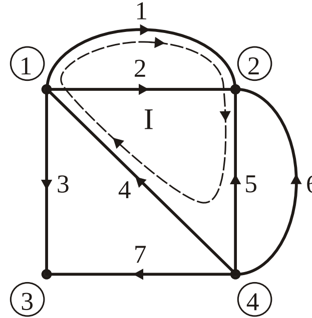


Figure 6.7: Subgraf kontura

6.5 Subgraf petlja i KZN

Za mrežu M, koja ima planarni graf G, prema KZN može se napisati $N_l - N_n + 1$ linearno nezavisnih algebarskih jednačina. Ovu osobinu električnih mreža dokazaćemo koristeći koncept *subgrafa petlja.* Subgraf petlja je svaka kontura grafa G koja ne sadrži ni jednu granu u svojoj unutrašnjosti. Kontura I opisana u prethodnom poglavlju ne zadovoljava klasifikacije subgrafa petlja, pošto sadrži granu 2 u svojoj unutrašnjosti.

Za planarni graf G, koji je prikazan na slici 6.5, definišimo subgrafove petlje. Na slici 6.8 isprekidanim linijama označene su petlje I, II, III i IV. Ove petlje nazivaju se *unutrašnje petlje.*

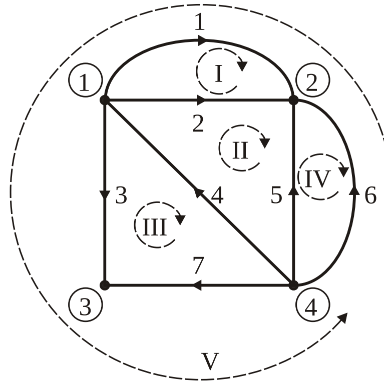


Figure 6.8: Subgrafovi unutrašnje petlje

Za razliku od unutrašnjih petlji, kontura grafa G izvan koje se ne nalazi ni jedna grana naziva se *vanjska petlja*. Na slici 6.8 isprekidanom linijom, koja se nalazi izvan grafa, označena je vanjska petlja. U planarnim, povezanim grafovima svaka grana je incidentna sa dvije petlje.

Za povezani planarni graf G može se definisati $N_p = N_l - N_n + 1$ unutrašnjih petlji. Dokaz ove tvrdnje izvodi se pomoću matematičke indukcije. Pretpostavimo da proizvoljni graf G, koji ima $N_p = N_l - N_n + 1$ petlju, modifikujemo tako da povećamo broj petlji za 1. Proces modifikacije grafa možemo ostvariti tako da izmedju dva proizvoljna čvora dodamo m novih grana, kao što je prikazano na slici 6.9. Dodane grane su incidentne sa dodanim $(m-1)$ čvorom.

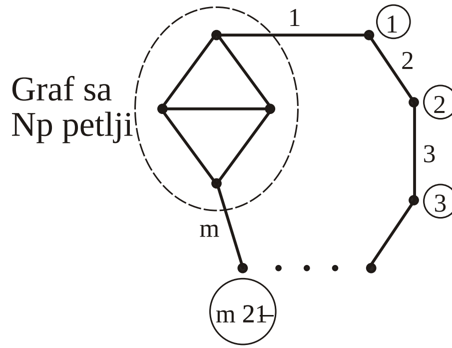


Figure 6.9: Ilustracija dokaza jednakosti $N_p = N_l - N_n + 1$

Modifikovani graf ima $N_p + 1$ petlju pri čemu vrijedi:

$$(N_l + m) - (N_n + m - 1) + 1 = (N_l - N_n + 1) + 1 = N_p + 1$$

Dakle, dodavanjem m grana i $m - 1$ čvorova broj petlji se povećao za 1. Time smo dokazali valjanost tvrdnje:

$$N_p = N_l - N_n + 1$$

Ukoliko na povezanom planarnom grafu G svaku unutrašnju petlju orjentišemo u smjeru kazaljke na satu, a vanjsku petlju u suprotnom smjeru (kao što je ilustrovano na slici 6.8) svaka grana ima smjer koji se poklapa sa jednom petljom, a suprotan je drugoj incidentnoj petlji. Za ovaj slučaj strukturu subgrafova petlji možemo opisati *potpunom matricom incidencije grana i petlji* $\mathbf{M}_0$ dimenzija $(N_p + 1 \times N_l)$. Za graf prikazan na slici 6.8 matrica $\mathbf{M}_0$ ima formu:

$$\mathbf{M}_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

U opštem slučaju elementi m_{ik} matrice $\mathbf{M}_0$ definišu se prema relaciji:

$$m_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{za granu } k \text{ u petlji } i\text{, čiji smjerovi se poklapaju} \\ -1, & \text{za granu } k \text{ u petlji } i\text{, čiji smjerovi su suprotni} \\ 0, & \text{kada grana } k \text{ ne pripada petlji } i \end{cases}$$

Posmatrajući elemente matrice $\mathbf{M}_0$ primjećujemo da ona ima iste osobine kao i matrica $\mathbf{A}_0$: svaka kolona sadrži samo dva nenulta elementa 1 i -1.

Za svaku petlju mogu se napisati jednačine prema KZN. Sistem jednačina prema KZN za N_p+1 petlju (uključujući i vanjsku) opisan je matričnom jednačinom:

$$\mathbf{M}_0\mathbf{v} = 0 \tag{6.10}$$

Prema analogiji sa matričnom jednačinom prema KZS za čvorove, sistem jednačina 6.10 predstavlja sistem linearno zavisnih jednačina. Ukoliko se iz matrice $\mathbf{M}_0$ eliminiše jedan red (obično red koji odgovara jednačini za vanjsku petlju) dobija se matrična jednačina:

$$\mathbf{M}\mathbf{v} = 0 \tag{6.11}$$

koja predstavlja sistem linearno nezavisnih, algebarskih jednačina. Na taj način dokazali smo da je za mrežu $\mathbf{M}$, koja sadrži N_l grana i N_n čvorova, prema KZN moguće napisati $N_p = N_l - N_n + 1$ nezavisnih linearnih jednačina.

6.6 Dualni grafovi i dualne mreže

U ovom poglavlju definisan je koncept *dualnosti grafova i mreža*. Na slici 6.10 prikazan je povezani planarni graf G, koji ima: $N_n = n+1 = 3$ čvora i $N_l = 5$ grana. Za prikazani graf može se definisati $N_p = N_l - n = 3$ unutrašnjih petlji.

Za planarni graf $\hat{G}$ kažemo da je *dualan graf* sa grafom G, ako zadovoljava sljedeće kriterije:

1. Postoji potpuna korespodencija petlji (uključujući i vanjsku) grafa G i čvorova grafa $\hat{G}$.

2. Postoji potpuna korespodencija petlji (uključujući i vanjsku) grafa $\hat{G}$ i čvorova grafa G.

3. Postoji potpuna korespodencija grana grafova, tako da kada dvije petlje jednog grafa imaju zajedničku granu, korespodentni čvorovi drugog grafa su povezani korespodentnom granom.

Iz ovih kriterija slijedi da graf $\hat{G}$ sadrži: $\hat{N}_l = 5$ grana, $\hat{N}_p + 1 = 4$ čvora i $\hat{n} = 2$ unutrašnje petlje. Odatle zaključujemo da je dualnost simetrična relacija izmedju topoloških grafova. Na slici 6.10 prikazani su dualni grafovi G i $\hat{G}$.

Postupak za konstrukciju dualnog grafa opisan je sljedećim algoritmom:

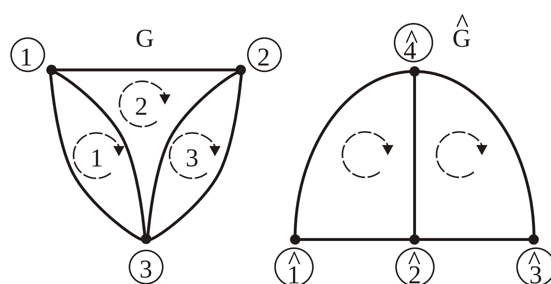


Figure 6.10: Dualni grafovi G i $\hat{G}$

1. Za svaku petlju grafa G pridružujemo čvor grafa $\hat{G}$. Za graf sa slike 6.10, za petlju 1 čvor 1 lociramo unutar petlje 1, za petlju 2 čvor 2 unutar petlje 2 itd., a za vanjsku petlju 4 čvor 4 lociramo izvan petlji 1, 2 i 3.

2. Za svaku granu k grafa G, koja je zajednička za dvije petlje (npr. petlje i i j) u dualnom grafu $\hat{G}$ lociramo grani koja povezuje čvorove i i j. Pri tome se uvažava i vanjska petlja.

Proces formiranja dualnog grafa prema predloženom algoritmu za graf G sa slike 6.10 ilustrovan je na slici 6.11. Isprekidane linije predstavljaju grane dualnog grafa $\hat{G}$.

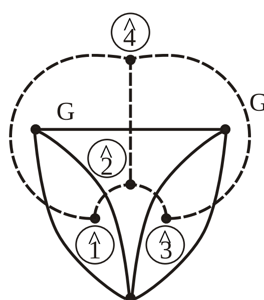


Figure 6.11: Ilustracija postupka formiranje dualnog grafa

Ukoliko je graf G orjentisan graf potrebno je orjentisati i dualni graf $\hat{G}$. Na primjeru grafa G, prikazang na slici 6.12, ilustrovan je proces odredjivanja orjentacije grana dualnog grafa $\hat{G}$.

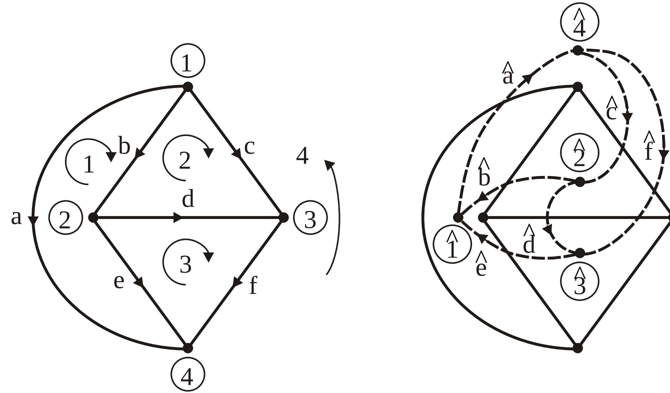


Figure 6.12: Ilustracija odredjivanja orjentacije grana dualnog grafa

Orjentacija grana dualnog grafa odredjuje se prema sljedećim pravilima:

1. Smjer svake grane grafa predstavimo vektorom, koji leži na grani i čiji je smjer odredjen smjerom grane.

2. Smjer vektora za dualni graf $\hat{G}$ dobijamo rotacijom vektora smjera korespodentne grane u grafu G za $90°$ u smjeru kazaljke na satu.

Opisanim postupkom za graf G definišemo orjentisani dualni graf $\hat{G}$, koji je prikazan na slici 6.13.

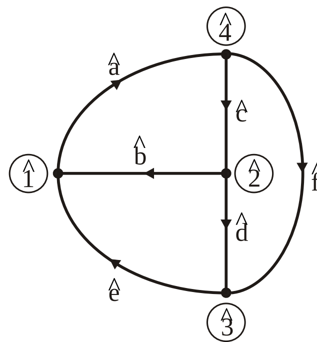


Figure 6.13: Orjentisani dualni graf $\hat{G}$

Za dualne grafove vrijedi da referentni čvor jednog grafa odgovara vanjskoj petlji drugog grafa. Ako za graf G usvojimo da je referentni čvor 4, tada čvor $\hat{4}$ u grafu $\hat{G}$, koji odgovara vanjskoj petlji grafa G, treba locirati tako da čvor 4 grafa G ne bude obuhvaćen grafom $\hat{G}$ (odnosno na suprotnu stranu od čvora 4).

Općenito graf G može da ima više dualnih grafova. Usvajanjem referentnom čvora u grafu G i specificiranjem da vanjska petlja dualnog grafa $\hat{G}$ odgovara referentnom čvoru, opisanom procedurom dobijamo jedinstveni dualni graf $\hat{G}$. Za ovako definisani dualni graf $\hat{G}$, grane u grafu G, koje su povezane sa referentnim čvorom, pripadaju vanjskoj petlji u dualnom grafu $\hat{G}$.

Prema izvedenom postupku dualnost grafova podrazumijeva korespodenciju izmedju:

1. grana i grana
2. čvorova i petlji
3. referentnog čvora i vanjske petlje.

Odavde se izvodi osobina dualnih grafova da je matrica incidencije grana i čvorova $\mathbf{A}$ grafa G identična sa matricom incidencije grana i petlji $\hat{\mathbf{M}}$ dualnog grafa $\hat{G}$. Odatle su identične i jednačine:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{i} &= 0 \\ \hat{\mathbf{M}}\hat{\mathbf{v}} &= 0 \end{aligned}$$

Za pasivne RLC mreže (koje ne sadrže spregnute elemente) definiše se pojam *dualne mreže.* Za mrežu $\hat{M}$ kažemo da je dualna sa mrežom M ako je: (1) topološki graf $\hat{G}$ dualan sa grafom G i (2) ako se jednačine stanja grana mreže $\hat{M}$ izvode iz odgovarajućih jednačina stanja korespodentnih grana mreže M, uvažavajući sljedeće substitucije varijabli stanja:

- $v(t) \rightarrow \hat{i}(t)$
- $i(t) \rightarrow \hat{v}(t)$
- $q(t) \rightarrow \hat{\phi}(t)$
- $\phi(t) \rightarrow \hat{q}(t)$

Ovdje su $\hat{v}, \hat{i}, \hat{q}$ i $\hat{\phi}$ odgovarajuće varijable stanja RLC elemenata u dualnoj mreži $\hat{M}$. Opisani postupak znači da su korespodentni (dualni) elementi:

1. otpornik R i provodnost G
2. induktivitet L i kapacitet C
3. naponski i strujni generator.

Takodje vrijedi da su dualni elementi: kratak spoj i prazan hod, te redna i paralena veza.

U tabeli 6.1 prikazani su dualne varijable stanja i dualni pojmovi mreža.

Table 6.1: Dualne varijable i dualni pojmovi mreža

Vrsta pojmova	mreža M	dualna mreža $\hat{M}$
Teoretski pojmovi mrežnih grafova	čvor grafa referentni čvor redna veza grana matrica M	petlja grafa vanjska petlja paralelna veza grana matrica A
Varijable stanja i karakteristike mreža	napon $v(t)$ naelektrisanje $q(t)$ otpornik zavojnica otpor R induktivitet admitansa kratak spoj strujni generator	struja $\hat{i}(t)$ fluks $\hat{\phi}(t)$ otpornik kondenzator provodnost G kapacitet impedansa otvorena veza naponski generator
Zakoni i metodi električnih mreža	KZS naponi čvorova	KZN struje petlji

Chapter 7

Matrični metodi rješavanja električnih mreža

U poglavlju 6 definisani su osnovni pojmovi geometrijskih grafova električnih mreža, matrice incidencija koje opisuju strukturu grafova, te matrični oblici jednačina Kirhofovih zakona (KZ). U ovom poglavlju izvedeni su *matrični metodi* rješavanja električnih mreža. Pri izvodjenju metoda korišten je koncept *generalizovane (standardizovane) grane mreže.* Primjena izvedenih metoda ilustrovana je na primjerima rješavanja rezistivnih kola i stacionarnog odziva linearnih mreža pri sinusnoj pobudi.

7.1 Rješavanje mreža pomoću Kirhofovih zakona

Za električnu mrežu M sa koncentrisanim parametrima i elementima sa jednim pristupom, koja sadrži N_n–čvorova i N_l–grana, i za koju su poznate *vi* karakteristike elemenata, usvojimo da svaki element čini jednu granu mreže. Tada su *vi* karakteristike elemenata ujedno i jednačine stanja grana. Stanje mreže u svakom trenutku vremena t odredjeno je varijablama stanja: naponima $\mathbf{v}(t)$ i strujama $\mathbf{i}(t)$ grana.

Vrijednosti vektora $\mathbf{v}(t)$ i $\mathbf{i}(t)$ mogu se odrediti rješavanjem sistema jednačina prema Kirhofovim zakonima uz korištenje jednačina, koje opisuju stanje grana.

Matrična jednačina prema KZS:

$$\mathbf{Ai}(t) = 0 \tag{7.1}$$

sadrži $N_n - 1$ nezavisnu algebarsku jednačinu sa N_l nepoznatih varijabli: struja grana $i_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, N_l)$. Matrična jednačina prema KZN:

$$\mathbf{Mv}(t) = 0 \tag{7.2}$$

sadrži $N_p = N_l - N_n + 1$ nezavisnu algebarsku jednačinu sa N_l nepoznatih varijabli: napona grana $v_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, N_l)$. Dakle, prema Kirhofovim zakonima moguće je napisati $(N_n - 1) + (N_l - N_n + 1) = N_l$ nezavisnih linearnih, algebarskih jednačina sa konstantnim koeficijentima, koje sadrže $2N_l$ nepoznatih varijabli. Jednačine prema Kirhofovim zakonima opisuju ograničenja na vrijednosti vektora $\mathbf{v}(t)$ i $\mathbf{i}(t)$, koja nameće topologija mreže i ne zavise od vi karakteristika.

Za svaku granu i mreže M vi karakteristika u opštem slučaju ima oblik:

$$f_i(v_i, pv_i, i_i, pi_i, e_i, t) = 0, \quad i = 1, 2, ..., N_l \tag{7.3}$$

U jednačini 7.3 operator p označava operaciju diferenciranja ($p = d/dt$). Signal $e_i(t)$ predstavlja signal nezavisnog izvora. Matrična formulacija vi karakteristika ima formu:

$$\mathbf{F}(\mathbf{v}, p\mathbf{v}, \mathbf{i}, p\mathbf{i}, \mathbf{e}, t) = 0 \tag{7.4}$$

gdje je $\mathbf{e}(t)$ vektor signala nezavisnih generatora. Matrična jednačina 7.4 sadrži N_l nezavisnih jednačina sa $2N_l$ nepoznatih.

Kombinovanjem jednačina prema KZ i jednačina vi karakteristika grana, može se definisati sistem $2N_l$ nezavisnih jednačina, koji sadrži $2N_l$ varijabli: napona i struja grana. Prema tome, Kirhofovi zakoni i vi karakteristike elemenata mreže jednoznačno definišu stanje mreže za svaki trenutak vremena t.

Matrica F može se razložiti na operatorske submatrice nad vektorima struja i napona i na submatricu nezavisnih izvora u granama, u obliku:

$$(\mathbf{P}_0 + p\mathbf{P}_1)\mathbf{i}(\mathbf{t}) + (\mathbf{R}_0 + p\mathbf{R}_1)\mathbf{v}(t) = \mathbf{e}(t) \tag{7.5}$$

gdje su: $\mathbf{P}, \mathbf{P}_1, \mathbf{R}, \mathbf{R}_1$ kvadratne matrice reda N_l, parametara elemenata mreže M vezanih za krajeve nezavisnih izvora. Za LVN mreže ove submatrice imaju konstantne koeficijente. Ako definišemo operatorske matrice:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(p) &= \mathbf{P}_0 + p\mathbf{P}_1 \\ \mathbf{R}(p) &= \mathbf{R}_0 + p\mathbf{R}_1 \end{aligned}$$

jednačina 7.5 može se izraziti u obliku:

$$\mathbf{P}(p)\mathbf{i}(t) + \mathbf{R}(p)\mathbf{v}(t) = \mathbf{e}(t) \tag{7.6}$$

Tada matrična formulacija osnovnih jednačina mreže ima oblik:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ 0 & \mathbf{M} \\ \mathbf{P}(p) & \mathbf{R}(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}(t) \\ \mathbf{v}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix} \tag{7.7}$$

Matrice $\mathbf{P}(p)$ i $\mathbf{R}(p)$ su rijetke matrice, koje za mreže koje ne sadrže spregnute elemente imaju dijagonalnu strukturu. Operator p se pojavljuje samo za grane koje sadrže dinamičke elemente (kondenzatore i zavojnice).

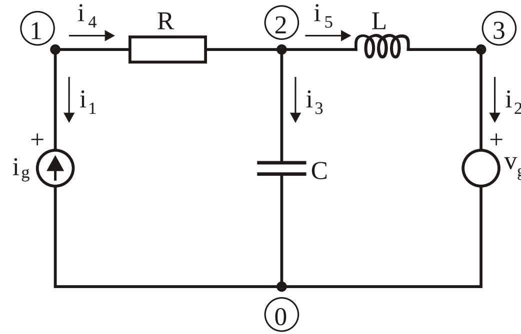


Figure 7.1: Ilustracija izvodjenja osnovnih jednačina mreže

Izvodjenje jedinstvene matrične forme osnovnih jednačina mreže 7.7 ilustrovaćemo za kolo prikazano na slici 7.1.

Jednačine prema KZS imaju oblik:

$$\begin{aligned} i_1 + i_4 &= 0 \\ i_2 - i_5 &= 0 \\ i_3 - i_4 + i_5 &= 0 \end{aligned}$$

odakle izvodimo:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Jednačine prema KZN imaju oblik:

$$\begin{aligned} -v_1 + v_3 + v_4 = 0 \\ v_2 - v_3 + v_5 = 0 \end{aligned}$$

odakle je:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jednačine grana (vi karakteristike elemenata koji čine granu) imaju oblik:

$$\begin{aligned} -i_1 &= i_g \\ v_2 &= v_g \\ -i_3 + C\,pv_3 &= 0 \\ R_4 i_4 - v_4 &= 0 \\ L\,pi_5 - v_5 &= 0 \end{aligned}$$

Tada su operatorske submatrice:

$$\mathbf{P}_0 = \begin{bmatrix} -1 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & R_4 & \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & L \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_0 = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & C & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

U opštem slučaju, za kola koja sadrže dinamičke elemente, sistem jednačina 7.6 može se transformisati substitucijom varijabli u diferencijalnu jednačinu višeg reda po odabranoj varijabli stanja. Diferencijalna jednačina višeg reda obično se izvodi za struju zavojnice ili napon kondenzatora analizirane mreže. Primjeri rješavanja odziva u vremenskom domenu prostih RLC kola primjenom opisanog postupka ilustrovani su u poglavljima 10. do 12.

Rješavanje složenih mreža primjenom KZ i postupka substitucije ne predstavlja metod koji je pogodan za korištenje digitalnih računara. U nastavku ovog poglavlja opisani su matrični metodi, koji su izvedeni korištenjem jednačina KZ i *vi* karakteristika grana, a koji su pogodni za primjenu digitalnih računara.

7.1.1 Generalisana grana mreže

U prethodnim poglavljima usvojeno je da svaki element mreže (svaki pristup kola sa koncentrisanim parametrima) čini jednu granu odgovarajućeg grafa. Ovakav postupak rezultira velikim redom sistema jednačina koje opisuju stanje kola. U ovom poglavlju definisan je koncept *generalisane (standardizovane) grane* kola, koji u mnogim slučajevima omogućava da se redukuje red sistema jednačina stanja. Generalisana grana je složena grana standardne konfiguracije, čija šema je za rezistivna kola prikazana na slici 7.2.

Jednačina stanja generalisane rezistivne grane k, $k = 1, 2, \ldots, N_l$ ima oblik:

$$\begin{aligned} v_k &= R_k(i_k - i_{gk}) + v_{gk} \\ &= R_k i_k + v_{gk} - R_k i_{gk} \end{aligned} \tag{7.8}$$

Matrični oblik jednačina 7.8 ima formu:

$$\mathbf{v} = \mathbf{Ri} + \mathbf{v}_g - \mathbf{Ri}_g \tag{7.9}$$

Jednačina stanja generalisane grane napisna pomoću provodnosti grane $G_k = 1/R_k$ ima oblik:

$$i_k = G_k v_k + i_{gk} - G_k v_{gk}$$

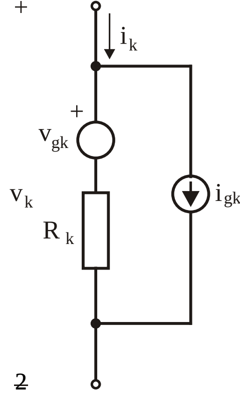


Figure 7.2: Generalisana grana rezistivne mreže

Matrični oblik jednačina stanja grana, izražen pomoću provodnosti grana, ima formu:

$$\mathbf{i} = \mathbf{G}\mathbf{v} + \mathbf{i}_g - \mathbf{G}\mathbf{v}_g \tag{7.10}$$

Matrica G se naziva matrica konduktansi grana i predstavlja dijagonalnu matricu dimenzija $[N_l \times N_l]$ i za mreže koje ne sadrže zavisne generatore ima oblik:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} G_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & G_2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & G_k & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & G_n \end{bmatrix}$$

Vektori napona $\mathbf{v}_g$ i struja $\mathbf{i}_g$ nezavisnih generatora imaju oblik:

$$\mathbf{v}_g = \begin{bmatrix} v_{g1} \\ v_{g2} \\ \vdots \\ v_{gk} \\ \vdots \\ v_{gN_l} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{i}_g = \begin{bmatrix} i_{g1} \\ i_{g2} \\ \vdots \\ i_{gk} \\ \vdots \\ i_{gN_l} \end{bmatrix}$$

Ukoliko grana i ne sadrži nezavisne izvore vrijedi $v_{gi} = 0$ i $i_{gi} = 0$. Općenito, vrijednosti pobudnih signala generatora i njihova lokacija u mreži su proizvoljni sve dok za mrežu vrijede Kirhofovi zakoni. Medjutim, ako naponski generatori formiraju konturu ili strujni generatori presjek, Kirhofovi zakoni postavljaju dodatna ograničenja na vrijednosti njihovih pobudnih signala.

Korištenjem jednačina generalisanih grana umjesto *vi* karakteristika elemenata smanjuje se broj jednačina, pošto se:

- smanjuje broj grana sa N_l na N_{l1}
- smanjuje broj čvorova sa N_n na N_{n1}

gdje su N_{l1} broj generalisanih grana, a N_{n1} broj njihovih krajeva, koji čine čvorove mreže.

7.2 Metod napona čvorova

U osnovama elektrotehnike izveden je metod napona čvorova i opisan je postupak direktnog formiranja jednačina čvorova za prosta električna kola. U ovom poglavlju, polazeći od matrične forme jednačina Kirhofovih zakona, izvodi se postupak formiranja jednačina čvorova, koji se može primjenjivati za rješavanje složenih električnih mreža.

7.2.1 Nezavisni naponi čvorova

Za mrežu M naponi grana $\mathbf{v}$ mogu se izraziti pomoću napona čvorova $\mathbf{v}_n$, koji predstavljaju potencijale čvorova u odnosu na izabrani referentni čvor. Obično se čvor N_n usvaja kao referentni. Tada se transformacija izmedju napona grana i napona čvorova izražava relacijom:

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}^T \mathbf{v}_n \tag{7.11}$$

gdje su:

- $\mathbf{v} = [v_1\, v_2 \cdots v_{N_l}]^T$ - vektor napona grana
- $\mathbf{v}_n = [v_{n1}\, v_{n2} \cdots v_{nn}]^T$ - vektor napona čvorova
- $n = N_n - 1$, dimenzija vektora $\mathbf{v}_n$

Matrična jednačina 7.8 predstavlja alternativni oblik KZN, koji je jednostaviji za korištenje od oblika 7.2, pošto se matrica $\mathbf{A}$ koristi i za definisanje KZS. Relacijom 7.8 uvode se nove varijable, *nezavisni naponi čvorova* $\mathbf{v}_n$, u jednačine mreže.

Matrična formulacija osnovnih jednačina mreže, u kojoj su uključeni i naponi čvorova, ima oblik:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_{N_l} & -\mathbf{A}^T \\ \mathbf{P}(p) & \mathbf{R}(p) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}(t) \\ \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{v}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix} \tag{7.12}$$

U matričnoj jednačini 7.12 kao promjenljive javljaju se naponi i struje grana i nezavisni naponi čvorova. Premda je jednačina 7.12 višeg reda od jednačine 7.7 ($2N_l + n > 2N_l$) radi jednostavnosti definisanja matrice $\mathbf{A}$, jednačina 7.12 se često koristi pri rješavanju električnih mreža pomoću digitalnih računara.

7.2.2 Rješavanje rezistivnih mreža metodom napona čvorova

Pretpostavimo da proizvoljnoj rezistivnoj mreži M, koja sadrži N_n čvorova i N_l generalisanih grana, odgovara povezani graf G. Čvor N_n izaberimo kao referentni čvor. Tada matrična forma jednačina prema KZS ima oblik 7.1:

$$\mathbf{Ai} = 0$$

gdje su:

- $\mathbf{i} = [i_1 i_2 ... i_{N_l}]^T$ - vektor struja grana
- $\mathbf{A}$ - matrica incidencije čvorova i grana grafa G, dimenzija $[n \times N_l]$

Matrična jednačina 7.1 predstavlja sistem n nezavisnih, linearnih jednačina, koje definišu balans struja grana za čvorove mreže.

Matričnu jednačinu prema KZN napišimo u obliku 7.11:

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}^T \mathbf{v}_n$$

gdje su:

- $\mathbf{v} = [v_1 \, v_2 \cdots v_{N_l}]^T$ - vektor napona grana
- $\mathbf{v}_n = [v_{n1} \, v_{n2} \cdots v_{nn}]^T$ - vektor napona čvorova

Jednačine stanja generalizovanih grana izrazimo u obliku 7.10:

$$\mathbf{i} = \mathbf{Gv} + \mathbf{i}_g - \mathbf{Gv}_g$$

Da bi se izvele jednačine u kojima su varijable stanja naponi čvorova $\mathbf{v}_n$, kombinuju se jednačinu 7.10 sa jednačinama 7.1 i 7.11. Množenjem jednačine 7.10 sa lijeve strane matricom $\mathbf{A}$, uvažavajući jednačinu 7.1, substitucijom vektora napona grana $\mathbf{v}$ sa $\mathbf{A}^T\mathbf{v}_n$ izvodi se:

$$\mathbf{AGA}^T\mathbf{v}_n + \mathbf{Ai}_g - \mathbf{AGv}_g = 0$$

odnosno:

$$(\mathbf{AGA}^T)\mathbf{v}_n = \mathbf{AGv}_g - \mathbf{Ai}_g \tag{7.13}$$

Matrica $(\mathbf{AGA}^T)$ je kvadratna matrica dimenzija $[n \times n]$, dok su matrice $(\mathbf{AGv}_g)$ i $(\mathbf{Ai}_g)$ n–dimenzioni vektori. Ukoliko definišemo sljedeće matrice:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_n &= \mathbf{AGA}^T \\ \mathbf{i}_n &= \mathbf{AGv}_g - \mathbf{Ai}_g \end{aligned}$$

matričnu jednačinu 7.13 možemo napisati u obliku:

$$\mathbf{Y}_n\mathbf{v}_n = \mathbf{i}_n \tag{7.14}$$

Matrica $\mathbf{Y}_n$ se naziva matrica *admitansi čvorova* i za rezistivne mreže je ekvivalentna matrici *konduktansi čvorova* $\mathbf{G}_n$. Vektor $\mathbf{i}_n$ se naziva vektor (injektiranih) *struja čvorova* i predstavlja algebarsku sumu struja nezavisnih generatora, koje se injektiraju u čvorove. Elementi matrice $\mathbf{Y}_n$ i vektora $\mathbf{i}_n$ odredjuju se na osnovu karakteristika mreže M (grafa G i *vi* karakteristika grana mreže). Matrična jednačina 7.14 naziva se *jednačina čvorova* i za LVN rezistivne mreže predstavlja sistem nezavisnih, linearnih algebarskih jednačina n–tog reda, sa n nepoznatih varijabli stanja (napona čvorova $\mathbf{v}_n$). Vektor napona čvorova $\mathbf{v}_n$ izračunava se prema relaciji:

$$\mathbf{v}_n = (\mathbf{Y}_n)^{-1}\mathbf{i}_n \tag{7.15}$$

Pošto za povezane planarne grafove G vrijedi $N_l > n$, opišanim postupkom se jednačine prema KZ sa $2N_l$ nepoznatih varijabli (napona i struja grana), izražavaju pomoću jednačina čvorova sa n nepoznatih varijabli (napona čvorova $\mathbf{v}_n$), kao novih nepoznatih. Nove varijable stanja, naponi čvorova $\mathbf{v}_n$, definišu se preko starih varijabli, napona grana $\mathbf{v}$, transformacijom koja je opisana relacijom 7.11. Ovim postupkom se dimenzija sistema jednačina koji treba riješiti smanjuje sa $2N_l$ na n. Opisani postupak transformacije polaznih varijabli stanja (napona grana $\mathbf{v}$) u nove varijable stanja (napone čvorova $\mathbf{v}_n$) naziva se postupak *transformacije koordinata stanja.* Matrica $\mathbf{A}$ naziva se *matrica transformacije* a jednačina $\mathbf{v} = \mathbf{A}^T\mathbf{v}_n$ *jednačina transformacije.* Pošto je jednačina transformacije linearna jednačina, ova transformacija varijabli stanja se klasifikuje kao *linearna transformacija.*

Kada se prema jednačini 7.15 izračunaju naponi čvorova $\mathbf{v}_n$, naponi grana se odredjuju prema relaciji:

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}^T\mathbf{v}_n \tag{7.16}$$

Tada se, za analiziranu rezistivnu mrežu, struje grana $\mathbf{i}$ izračunavaju prema relaciji:

$$\mathbf{i} = \mathbf{G}\mathbf{v} + \mathbf{i}_g - \mathbf{G}\mathbf{v}_g \tag{7.17}$$

Za rezistivnu mrežu, koja sadrži samo nezavisne izvore, matrica admitansi čvorova $\mathbf{Y}_n$ je simetrična matrica, odnosno vrijedi; $y_{ij} = y_{ji}$, za $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Ova osobina matrice $\mathbf{Y}_n$ za rezistivne mreže direktno slijedi iz jednačine transformacije:

$$\mathbf{Y}_n = \mathbf{A}\mathbf{G}\mathbf{A}^T$$

pošto za dijagonalnu matricu $\mathbf{G}$ vrijedi $\mathbf{G}^T = \mathbf{G}$, odakle je:

$$\mathbf{Y}_n^T = (\mathbf{A}\mathbf{G}\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}\mathbf{G}^T\mathbf{A}^T = \mathbf{A}\mathbf{G}\mathbf{A}^T = \mathbf{Y}_n$$

Za LVN rezistivnu mrežu sve konduktanse grana su pozitivne ($g_j > 0$). Tada je $\mathbf{Y}_n$ simetrična matrica za koju vrijedi $det(\mathbf{Y}_n) > 0$. Odatle prema Kramerovom pravilu slijedi da je rješenje sistema jednačina 7.14 jedinstveno. Prema tome, neophodan uslov za jedinstvenost rješenja matrične jednačine 7.14 je pozitivnost konduktansi grana, što je ispunjeno za LVN rezistivne mreže.

Opisani postupak izvodjenja jednačina čvorova ilustrovan je na primjeru rezistivne mreže sa slike 7.3.

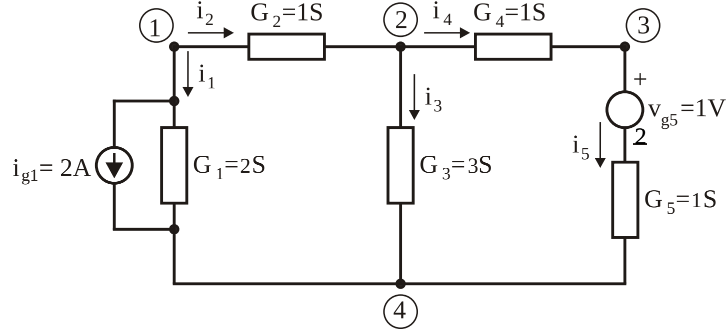


Figure 7.3: Primjer izvodjenja jednačina čvorova za rezistivnu mrežu

Za referentni čvor izaberimo čvor 4. Tada matrični oblik jednačina prema KZS ima oblik:

$$\mathbf{Ai} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{bmatrix} = 0 \tag{7.18}$$

Prema KZN napone grana $\mathbf{v}$ možemo izraziti preko napona čvorova $\mathbf{v}_n$ prema relaciji:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^T \mathbf{v}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{n1} \\ v_{n2} \\ v_{n3} \end{bmatrix} \tag{7.19}$$

Jednačina stanja grana u matričnoj formi ima izgled:

$$\begin{aligned} \mathbf{i} &= \mathbf{Gv} + \mathbf{i}_g - \mathbf{Gv}_g = \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{7.20}$$

Množenjem jednačine 7.20 sa lijeve strane sa matricom $\mathbf{A}$ i substitucijom napona grana $\mathbf{v}$ sa naponima čvorova $\mathbf{v}_n$ (prema relaciji 7.19) izvodimo:

$$\mathbf{Ai} = \mathbf{AGA}^T \mathbf{v}_n + \mathbf{Ai}_g - \mathbf{AGv}_g = 0 \tag{7.21}$$

Jednačina 7.21 može se napisati u obliku:

$$\mathbf{AGA}^T\mathbf{v}_n = \mathbf{AGv}_g - \mathbf{Ai}_g \tag{7.22}$$

odnosno skraćeno:

$$\mathbf{Y}_n\mathbf{v}_n = \mathbf{i}_n \tag{7.23}$$

Vrijednost matrice admitansi čvorova tada izračunavamo prema relaciji:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Y}_n &= \mathbf{AGA}^T \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{7.24}$$

Vektor injektiranih struja čvorova izračunavamo prema relaciji:

$$\mathbf{i}_n = \mathbf{AGv}_g - \mathbf{Ai}_g = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{7.25}$$

Tada jednačine čvorova za analiziranu mrežu imaju oblik:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{n1} \\ v_{n2} \\ v_{n3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{7.26}$$

Naponi čvorova se izračunavaju iz jednačine 7.26 prema relaciji:

$$\mathbf{v}_n = \mathbf{Y}_n^{-1}\mathbf{i}_n = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 9 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} -17 \\ -1 \\ 12 \end{bmatrix} \tag{7.27}$$

Naponi grana se izračunavaju iz poznatih napona čvorova, prema relaciji 7.8:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^T\mathbf{v}_n = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} -17 \\ -16 \\ -1 \\ -13 \\ 12 \end{bmatrix}$$

odakle se struje grana odredjuju prema relaciji 7.12:

$$\mathbf{i} = \mathbf{Gv} + \mathbf{i}_g - \mathbf{Gv}_g = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 16 \\ -16 \\ -3 \\ -13 \\ -13 \end{bmatrix} \tag{7.28}$$

7.2.3 Rezistivne mreže koje sadrže idealne naponske izvore

Ukoliko rezistivne mreže sadrže grane koje čine idealni naponski generatori ove mreže nije moguće rješavati opisanom metodom napona čvorova, pošto za takve grane vrijedi $R_j = R_{vg} = 0$, odnosno $G_j = G_{vg} = \infty$. U tom slučaju nije moguće odrediti matricu $\mathbf{Y}_n^{-1}$. Zbog toga se u metodu napona čvorova grane sa idealnim naponskim generatorima posmatraju odvojeno od ostalih grana. Pošto je metod napona čvorova zasnovan na jednakom tretiranju svih grana mreže preko modela generalisane grana, za mreže koja sadrže idealne naponske izvore neophodno je izvršiti transformaciju strukture mreže, realokacijom idealnih naponskih izvora. U nastavku ovog poglavlja opisan je postupak transformacije rezistivnih mreža koje sadrže idealni naponski generator.

Na slici 7.4 ilustrovan je postupak transformacije mreže M eliminacijom grane (grana 1 koja spaja čvorove 1 i 2), koja sadrži idealni naponski generator v_g.

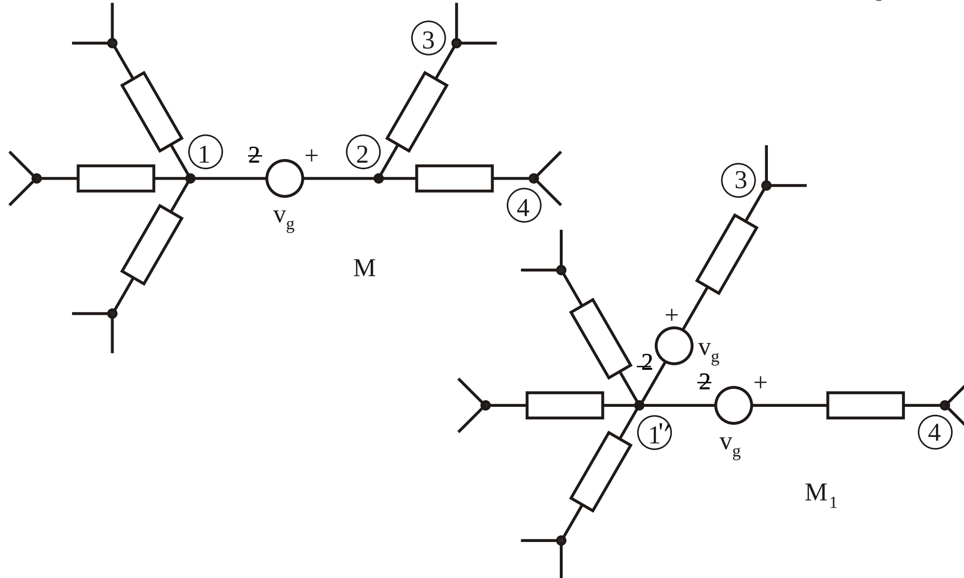


Figure 7.4: Transformacija mreže eliminacijom grane koja sadrži idealni naponski generator

Prilikom eliminacije grane 1, kratkim spajanjem čvorova 1 i 2 (pošto je $R_{vg} = 0$) nastao je u transformisanoj mreži M_1 novi čvor 1'. Pri tome je naponski generator v_g ubačen u transformisanoj mreži M_1 u grane 2 i 3, koje su bile susjedne sa granom 1. Tako opisana transformacija ne mijenja ograničenja prema KZN i KZS, odnosno mreže M i M_1 su ekvivalentne (osim što mreža M_1 ne sadrži granu 1). Jednostavno se dokazuje da su jednačine prema KZN za zatvorene puteve koji sadrže grane 2 i 3, identične za mreže M i M_1. Jednačina za KZS za novi čvor 1' jednaka je sumi jednačina prema KZS za čvorove 1 i 2.

Opisanim postupkom eliminiše se grana koja sadrži idealni naponski generator, tako da se sve grane mogu opisati opštim modelom generalisane grane, prikazanim

na slici 7.2. To omogućava da se transformisana mreža rješava opisanim metodom napona čvorova. Nakon odredjivanja vrijednosti napona čvorova u transformisanoj mreži M_1 mogu se odrediti naponi čvorova, a onda i naponi i struje grana, u polaznoj mreži M.

7.2.4 Ekvivalentni naponski i strujni generatori generalisane grane

Opšta šema generalisane grane, prikazane na slici 7.2, može se transformisati tako da sadrži samo naponske ili strujne generatore. Opšta šema rezistivne mreže, koja sadrži samo naponske generatore, prikazana je na slici 7.5. Do ove šeme se dolazi preuredjivanjem jednačine generalisane grane:

$$v_k = R_k(i_k + i_{gk}) + v_{gk}$$

u jednačinu:

$$v_k = (v_{gk} - R_k i_{gk}) + R_k i_k \tag{7.29}$$

Strujni generator i_{gk} u opštoj šemi predstavljen je u izvedenoj šemi ekvivalentnim naponskim generatorom $R_k i_{gk}$, koji injektira struju u isti čvor kao i strujni generator.

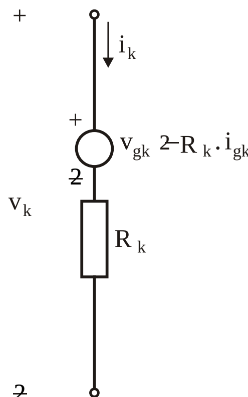


Figure 7.5: Šema generalisane grane koja sadrži samo naponske generatore

Analogno, opšta šema rezistivne mreže koja sadrži samo strujne generatore prikazana je na slici 7.6.

Do ove šeme se dolazi preuredjenjem jednačine opšte grane:

$$i_k = G_k(v_k - v_{gk}) + i_{gk}$$

u jednačinu:

$$i_k = (i_{gk} - G_k v_{gk}) + G_k v_k \tag{7.30}$$

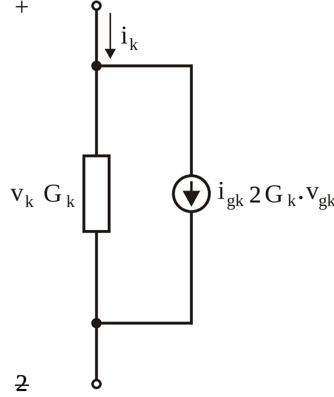


Figure 7.6: Šema generalisane grane koja sadrži samo strujne generatore

Naponski generator v_{gk} predstavljen je ekvivalentnim strujnim generatorom $G_k v_{gk}$. Smjer ekvivalentnog generatora je prema čvoru u koji je usmjeren znak + naponskog generatora.

7.2.5 Direktno pisanje jednačina čvorova

Iz osnova elektrotehnike poznato je da se jednačine čvorova mogu napisati direktno, na osnovu inspekcije strukture mreže koja se rješava. U ovoj sekciji izvešćemo pravila za direktno pisanje jednačina čvorova za rezistivne mreze, na osnovu matričnih jednačina koje smo do sada definisali.

Matričnu jednačinu:

$$\mathbf{Y}_n \mathbf{v}_n = \mathbf{i}_n$$

napišimo u skalarnom obliku:

$$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{n1} \\ v_{n2} \\ \vdots \\ v_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{n1} \\ i_{n2} \\ \vdots \\ i_{nn} \end{bmatrix}$$

Na osnovu relacije $\mathbf{Y}_n = \mathbf{AGA}^T$, uvažavajući da je matrica $\mathbf{G}$ dijagonalna matrica, mogu se definisati pravila za direktno izračunavanje vrijednosti elemenata y_{ik} matrice admitansi čvorova $\mathbf{Y}_n$ i elemenata i_{ni} matrice struja čvorova $\mathbf{i}_n$.

1. Dijagonalni element y_{ii} izračunava se prema relaciji:

$$y_{ii} = \sum_{j=1}^{N_l} a_{ij} G_j a_{ij} = \sum_{j=1}^{N_l} (a_{ij})^2 G_j$$

Član $(a_{ij})^2$ može imati vrijednosti

- 1, ako su čvor i i grana j incidentni
- 0, ako čvor i i grana j nisu incidentni

Dakle, možemo pisati:

$$y_{ii} = \sum_{j \in i}^{N_l} G_j \tag{7.31}$$

gdje simbol $\sum_{j \in i}^{N_l} G_j$ označava sumu konduktansi svih grana j koje su incidentne sa čvorom i. Odavde izvodimo sljedeće pravilo:

Dijagonalni element y_{ii} predstavlja sumu konduktansi svih grana koje su incidentne sa čvorom i.

Zato se član y_{ii} naziva *sopstvena admitansa (konduktansa) čvora.*

2. Vandijagonalni element y_{ik} izračunava se prema relaciji:

$$y_{ik} = \sum_{j=1}^{N_l} a_{ij} G_j a_{kj} = \sum_{j=1}^{N_l} (a_{ij} a_{kj}) G_j$$

Član $(a_{ij} a_{kj})$ ima vrijednost (0) ako grana j nije incidentna sa jednim od čvorova i i k (pošto tada vrijedi $a_{ij} = 0$ ili $a_{kj} = 0$). Kada je grana j incidentna sa oba čvora i i k, odnosno kada povezuje ove čvorove, vrijedi $a_{ij} a_{kj} = -1$. Tada se može pisati:

$$y_{ik} = -\sum_{j \in i,k}^{N_l} G_j \tag{7.32}$$

gdje simbol $-\sum_{j \in i,k}^{N_l} G_j$ označava negativnu sumu konduktansi svih grana j koje povezuju čvorove i i k. Prema tome vrijedi:

Vandijagonalni element y_{ik} predstavlja negativnu sumu konduktansi grana G_j, koje su incidentne sa čvorovima i i k. Za čvorove koji nemaju direktnu vezu vrijedi $y_{ik} = 0$.

Zato se član y_{ik} naziva *medjusobna admitansa (konduktansa) čvorova.*

Struje čvorova $\mathbf{i}_n$ izračunavaju se prema sljedećem postupku:

1. Mreža M se transformiše u mrežu M_1 tako da se svi naponski generatori predstave pomoću ekvivalentnih strujnih generatora generalisane grane.

2. Tada se elementi vektora $\mathbf{i}_n$ za mrežu M_1 izračunavaju na osnovu jednačine $\mathbf{i}_n = -\mathbf{A}\mathbf{i}_g$, prema sljedećoj relaciji:

$$i_{ni} = -\sum_{j=1}^{N_l} a_{ij}\ i_{gj}$$

Pošto je član sume $a_{ij} \neq 0$ samo za grane j koje su incidentne sa čvorom i možemo pisati:

$$i_{ni} = -\sum_{j\in i}^{N_l} a_{ij}\ i_{gj} \tag{7.33}$$

Odavde za transformisanu mrežu M_1 izvodimo sljedeće pravilo:

Član i_{ni} vektora $\mathbf{i}_n$ predstavlja algebarsku sumu struja strujnih generatora i_{gj} u granama j, koje su incidentne sa čvorom i. Pri tome se za struje generatora koje ulaze u čvor i usvaja pozitivan, a za struje koje izlaze iz čvora i negativan predznak.

7.3 Metod struja petlji

U poglavlju 7.1 izvedena je relacija 7.2 koja izražava KZN za unutrašnje petlje:

$$\mathbf{M}\mathbf{v} = 0$$

Matrica incidencije petlji i grana $\mathbf{M}$ ima dimenzije $[N_p \times N_l]$. Matrična jednačina 7.2 napisana u skalarnoj formi ima oblik:

$$\sum_{k=1}^{N_l} m_{ik}\, v_k = 0, \text{ za } i = 1, 2, ..., N_p \tag{7.34}$$

Definišimo pojam *struje petlje* j_{pi} kao struju koja "obuhvata" petlju i, i čiji je referentni smjer odredjen smjerom unutrašnje petlje (smjer kazaljke na satu). Struje petlji su virtualne varijable, koje u opštem slučaju nemaju fizičko značenje i za koje ne vrijede Kirhofovi zakoni. Struje grana $\mathbf{i}$ jednoznačno su odredjene pomoću struja petlji $\mathbf{j}_p$ prema matričnoj jednačini:

$$\mathbf{i} = \mathbf{M}^T \mathbf{j}_p \tag{7.35}$$

što se jednostvano dokazuje primjenom KZS, na osnovu definicije struja petlji i analizom relacije 7.35. Pošto je jednačina 7.35 linearna, vektor struja petlji $\mathbf{j}_p$ se definiše pomoću linearne transformacije vektora struja grana $\mathbf{i}$, koju opisuje jednačina 7.35.

Jednačina 7.34 sadrži N_p nezavisnih, algebarskih jednačina ($N_p = N_l - N_n + 1$) sa N_l varijabli stanja, napona grana v_k ($k = 1, 2, \ldots, N_l$). Relacija 7.35 preko N_l jednakosti izražava vezu izmedju N_l "starih" varijabli stanja (struja grana i_k, $k = 1, 2, \ldots, N_l$) i N_p "novih" varijabli stanja (struja petlji j_{pj}, $j = 1, 2, \ldots, N_p$).

Matrični metod struja petlji zasniva se na opisanoj transformaciji struja grana $\mathbf{i}$ u struje petlji $\mathbf{j}_p$, što omogućava da se jednačine stanja izraze pomoću novih varijabli stanja. Pri izvodjenju novih jednačina stanja, pored jednačina 7.34 i 7.35, potrebno je koristiti i jednačine stanja grana. Rješavanjem novih (transformisanih) jednačina stanja mreže, koje se nazivaju *jednačine struja petlji* izračunavaju se

struje petlji $\mathbf{j}_p$. Struje grana $\mathbf{i}$ izračunavaju se iz struja petlji korištenjem jednačine 7.35. Konačno, odredjuju se naponi grana $\mathbf{v}$ na osnovu jednačine 7.9. U ovom poglavlju primjena metoda struja petlji ilustrovana je na primjeru rješavanja rezistivnih mreža.

7.3.1 Rješavanje rezistivnih mreža metodom struja petlji

Za rezistivnu mrežu M, koja sadrži N_l grana i N_n čvorova i čiji graf G je planaran i povezan, može se definisati $N_p = N_l - (N_n - 1) = N_l - n$ unutrašnjih petlji. Za svaku petlju definiše se struja petlje $(j_{pk},\ k = 1, 2, \ldots, N_p)$. Polazeći od jednačine stanja grane k rezistivne mreže M:

$$v_k = R_k i_k + v_{gk} - R_k i_{gk}$$

izvodi se matrična jednačina stanja grana:

$$\mathbf{v} = \mathbf{R}\mathbf{i} + \mathbf{v}_g - \mathbf{R}\mathbf{i}_g \tag{7.36}$$

Matrica $\mathbf{R}$ naziva se *matrica otpora grana.* Matrica R je dijagonalna matrica dimenzija $[N_l \times N_l]$ i u opštem slučaju ima oblik:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & R_k & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & R_{N_l} \end{bmatrix}$$

Množenjem matrične jednačine 6.36 sa lijeve strane matricom $\mathbf{M}$, uvažavajući $\mathbf{M}\mathbf{v} = 0$, nakon supstitucije vektora struja grana $\mathbf{i}$ preko vektora struja petlji $\mathbf{j}_p$ (prema relaciji $\mathbf{i} = \mathbf{M}^T\mathbf{j}_p$), izvodimo matričnu jednačinu:

$$(\mathbf{M}\mathbf{R}\mathbf{M}^T)\mathbf{j}_p = \mathbf{M}\mathbf{R}\mathbf{i}_g - \mathbf{M}\mathbf{v}_g \tag{7.37}$$

Matrica $(\mathbf{M}\mathbf{R}\mathbf{M}^T)$ je kvadratna matrica dimenzija $[N_p \times N_p]$, dok su matrice $(\mathbf{M}\mathbf{R}\mathbf{i}_g)$ i $(\mathbf{M}\mathbf{v}_g)$ N_p–dimenzioni vektori. Definišimo sljedeće matrice:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_p &= \mathbf{M}\mathbf{R}\mathbf{M}^T \\ \mathbf{e}_p &= \mathbf{M}\mathbf{R}\mathbf{i}_g - \mathbf{M}\mathbf{v}_g \end{aligned}$$

Matrica $\mathbf{Z}_p$ se naziva *matrica impedansi petlji* i za rezistivne mreže je jednaka matrici otpora petlji, a vektor $\mathbf{e}_p$ se naziva *vektor napona petlji.* Tada jednačinu 7.37 možemo pisati u obliku:

$$\mathbf{Z}_p\mathbf{j}_p = \mathbf{e}_p \tag{7.38}$$

Jednačina 7.38 naziva se *jednačina struja petlji* i sadrži N_p nezavisnih, linearnih algebarskih jednačina sa konstantnim koeficijentima.

Vektor struja petlji se odredjuje prema relaciji:

$$\mathbf{j}_p = \mathbf{Z}_p^{-1}\mathbf{e}_p$$

Struje grana se tada izračunavaju prema relaciji:

$$\mathbf{i} = \mathbf{M}^T\mathbf{j}_p$$

a naponi grana, na osnovu izračunatih struja grana, prema relaciji:

$$\mathbf{v} = \mathbf{R}\mathbf{i} + \mathbf{v}_g - \mathbf{R}\mathbf{i}_g$$

7.3.2 Rezistivne mreže koje sadrže idealne strujne izvore

Ukoliko rezistivne mreže sadrže grane koje čine idealni strujni generatori, takve mreže nije moguće rješavati opisanom metodom struja petlji, pošto za ove grane vrijedi $R_j = R_{ig} = \infty$. U tom slučaju nije moguće odrediti matricu $\mathbf{Z}_n^{-1}$. Zbog toga se u metodu struja petlji grane sa idealnim strujnim generatorima posmatraju odvojeno od ostalih grana. Pošto je metod struja petlji zasnovan na jednakom tretiranju svih grana mreže preko modela generalisane grana, za mreže koja sadrže idealne strujne izvore neophodno je izvršiti transformaciju strukture mreže, realokacijom idealnih strujnih izvora. U nastavku ovog poglavlja opisan je postupak transformacije rezistivnih mreža koje sadrže idealni strujni generator.

Na slici 7.7 ilustrovan je postupak transformacije mreže M, eliminacijom grane koja sadrži idealni strujni generator i_g (grana koja spaja čvorove 1 i 2).

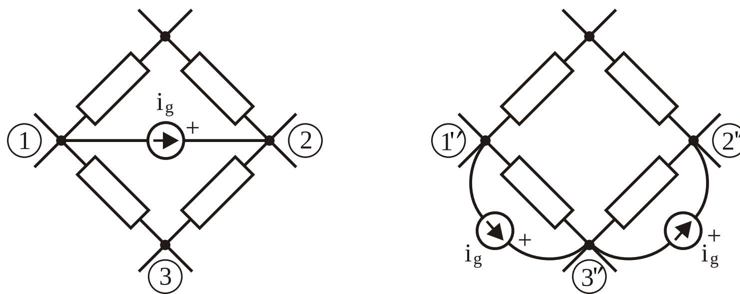


Figure 7.7: Transformacija mreže eliminacijom grane koja sadrži idealni strujni generator

U transformisanoj mreži M_1 eliminiše se grana izmedju čvorova 1 i 2 (pošto je $G_{ig} = 0$), a idealni strujni generator i_g predstavlja se preko ekvivalentnih generatora, koji se lociraju paralelno sa susjednim granama koje spajaju čvorove 1 i 2 (granama na putu izmedju čvorova 1 i 2.) Pisanjem jednačina prema KZS jednostavno se dokazuju da mreže M i M_1 imaju isti oblik ograničenja za struje grana. Jednačine prema KZN su takodje identične što znači da su mreže M i M_1 ekvivalentne.

Opisanim postupkom eliminiše se grana koja sadrži idealni strujni generator, tako da se sve grane mogu opisati opštim modelom prikazanim na slici 7.2. To omogućava da se transformisana mreža rješava opisanim metodom struja petlji. Nakon odredjivanja vrijednosti struja petlji u transformisanoj mreži M_1 mogu se odrediti struje petlji, a onda i naponi i struje grana, u polaznoj mreži M.

7.3.3 Direktno pisanje jednačina petlji

Analogno sa postupkom za direktno pisanje jednačina čvorova može se izvesti postupak za direktno pisanje jednačina petlji:

$$\mathbf{Z}_p \mathbf{j}_p = \mathbf{e}_p$$

U ovom poglavlju izvedena su pravila za direktno izračunavanje elemenata matrica $\mathbf{Z}_p$ i $\mathbf{e}_p$ za rezistivne mreže. Pri tome se koristi osobina ovih mreža da je matrica $\mathbf{R}$ dijagonalna matrica.

Na osnovu relacije $\mathbf{Z}_p = \mathbf{MRM}^T$, analogno sa izvodjenjem pravila za direktno izračunavanje matrice admitansi čvorova, mogu se definisati pravila za direktno izračunavanje vrijednosti elemenata z_{ik} matrice impedansi petlji $\mathbf{Z}_p$.

1. Dijagonalni element z_{ii} izračunava se prema relaciji:

$$z_{ii} = \sum_{j=1}^{N_l} m_{ij} R_j m_{ij} = \sum_{j=1}^{N_l} (m_{ij})^2 R_j$$

   Pošto član $(m_{ij})^2$ može imati nenultu vrijednost $(m_{ij})^2 = 1$ samo ako su petlja i i grana j incidentni možemo pisati:

$$z_{ii} = \sum_{j \in i}^{N_l} R_j \tag{7.39}$$

   gdje simbol $\sum_{j \in i}^{N_l} R_j$ označava sumu otpora svih grana j koje su incidentne sa petljom i. Odavde se izvodi sljedeće pravilo:

   Dijagonalni element z_{ii} predstavlja sumu otpora svih grana j koje su incidentne sa petljom i.

   Zato se član z_{ii} naziva *sopstvena impedansa (otpor) čvora.*

2. Vandijagonalni element z_{ik} izračunava se prema relaciji:

$$z_{ik} = \sum_{j=1}^{N_l} m_{ij} R_j m_{kj} = \sum_{j=1}^{N_l} (m_{ij} m_{kj}) R_j$$

   Član $(m_{ij} m_{kj})$ ima vrijednost 0 ako grana j nije incidentna sa jednom od petlji i i k (pošto tada vrijedi $m_{ij} = 0$ ili $m_{kj} = 0$). Kada je grana j incidentna sa obje petlje, odnosno kada istovremeno pripada petlajma i i k, vrijedi $m_{ij} m_{kj} = -1$. Tada se može pisati:

$$z_{ik} = -\sum_{j \in i,k}^{N_l} R_j \tag{7.40}$$

   gdje simbol $-\sum_{j \in i,k}^{N_l} R_j$ označava negativnu sumu otpora svih grana j koje su zajedničke petljama i i k. Prema tome vrijedi:

   Vandijagonalni element z_{ik} predstavlja negativnu sumu otpora grana R_j, koje su zajedničke petljama i i k. Za petlje koje nemaju zajedničku granu vrijedi $z_{ik} = 0$.

   Zato se član z_{ik} naziva *medjusobna impedansa (otpor) petlji.*

Elementi matrice napona petlji $\mathbf{e}_p$ izračunavaju se prema sljedećem postupku:

1. Mreža M se transformiše u mrežu M_1 tako da se svi strujni generatori predstave pomoću ekvivalantnih naponskih generatora generalisane grane.

2. Tada se elementi vektora $\mathbf{e}_p$ za mrežu M_1 izračunavaju na osnovu jednačine $\mathbf{e}_p = -\mathbf{M}\mathbf{v}_g$, prema sljedećoj relaciji:

$$e_{pi} = -\sum_{j=1}^{N_l} m_{ij} \; v_{gj}$$

   Pošto je član sume $m_{ij} \neq 0$ samo za grane j koje su incidentne sa petljom i možemo pisati:

$$e_{pi} = -\sum_{j \in i}^{N_l} m_{ij} \; v_{gj} \tag{7.41}$$

   Odavde za transformisanu mrežu M_1 izvodimo sljedeće pravilo:

   Član e_{pi} vektora $\mathbf{e}_p$ jednak je algebarskoj sumi napona naponskih generatora u granama koje pripadaju petlji. Pri tome se za naponske generatore čiji se smjer djelovanja poklapa sa smjerom petlje usvaja pozitivan, a za generatore čiji smjer je suprotan smjeru petlje, negativan predznak.

7.4 Metod struja kontura

Metod struja kontura predstavlja generalizaciju metoda struja petlji, i kao takav predstavlja fleksibilniji postupak rješavanja mreža.

Prije izvodjenja jednačina kontura potrebno je definisati sljedeće pojmove iz teorije grafova:

- subgraf *stablo* i *fundamentalno stablo*
- subgraf *ko-stablo* i *fundamentalno ko-stablo*
- subgraf *kontura* i *fundamentalna kontura*

Za povezani graf G subgraf S naziva se subgraf stablo ukoliko vrijedi:

- subgraf S je povezani graf
- subgraf S sadrži sve čvorove grafa G
- subgraf S ne sadrži niti jedan zatvoreni put.

Grane subgrafa stablo nazivaju se *grane stabla.* Preostale grane grafa G, koje ne pripadaju stablu S, nazivaju se *spojnice* i čine subgraf ko-stablo. Za povezani graf G može se definisati više subgrafova tipa stablo. Ako povezani graf ima N_n čvorova, i ako ne sadrži paralelne grane, u opštem slučaju može se formirati $N_n^{N_n-2}$ subgrafova tipa stablo (za $N_n=5$ broj subgrafova stablo iznosi $5^3=125$).

Proces formiranja subgrafa S ilustrovan je na primjeru grafa G sa slike 7.8.

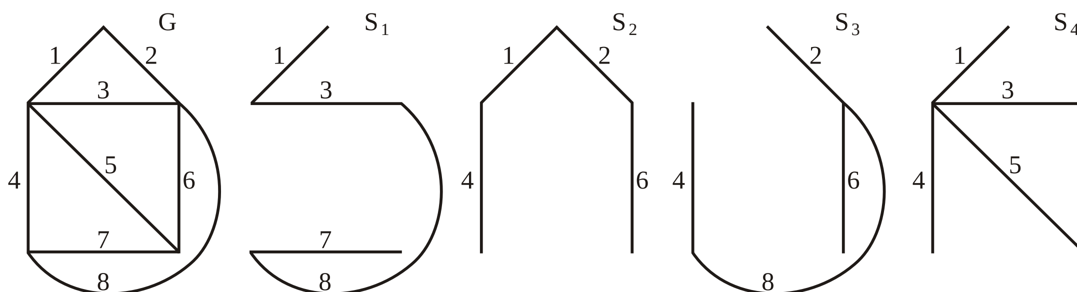


Figure 7.8: Ilustracija formiranja subgrafa stablo

Za povezani graf G koji ima N_n čvorova i N_l grana subgraf stablo S sadrži N_n-1 granu, a subgraf ko-stablo $N_l-(N_n-1)=N_l-n$ granu. Stablo S predstavlja jedinstven (prost) put izmedju čvorova grafa G. Nadalje, svaka grana ko-stabla zajedno sa granama stabla formira jedinstveni zatvoreni put koji se naziva kontura. Zato se grane stabla nazivaju spojnice. Ovako formirano stablo naziva se *fundamentalno stablo*, a odgovarajuće konture *fundamentalne konture*.

7.4.1 Jednačine KZ za fundamentalne konture

Definisanje jednačina prema Kirhofovim zakonima za fundamentalne konture ilustrovaćemo na primjeru grafa G prikazanog na slici 7.9.

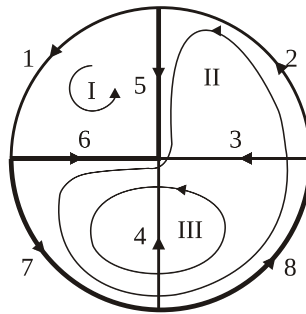


Figure 7.9: Fundamentalno stablo i fundamentalne konture

Za graf G sa slike 7.9 vrijedi: $N_n = 5$, $n = N_n - 1 = 4$, $N_l = 8$ i $N_k = N_l - n = 4$. Za izabrano fundamentalno stablo, koga čine grane: 5, 6, 7 i 8, subgraf ko–stablo sadrži 4 spojnice: grane 1, 2, 3 i 4. Dakle broj kontura jednak je 4, odnosno broj kontura jednak je broju unutrašnjih petlji $N_k = N_p = 4$. Za svaku konturu mogu se napisati jednačine ravnoteže napona grana prema KZN. Ove jednačine se pišu za usvojeni referentni smjer konture, koji je odredjen smjerom odgovarajuće spojnice. Tako za graf G smjerove kontura I, II, III i IV odredjuju smjerovi spojnica 1, 2, 3 i 4 respektivno. Za usvojene smjerove kontura, jednačine prema KZN imaju oblik:

$$
\begin{aligned}
v_1 - v_5 - v_6 &= 0 \quad \text{I kontura} \\
v_2 + v_5 - v_6 + v_7 + v_8 &= 0 \quad \text{II kontura} \\
v_3 - v_6 + v_7 + v_8 &= 0 \quad \text{III kontura} \\
v_4 - v_6 + v_7 &= 0 \quad \text{IV kontura}
\end{aligned}
$$

Jednačine KZN za fundamentalne konture predstavljaju sistem nezavisnih, linearnih, homogenih algebarskih jednačina. Za graf G matrična jednačina KZN ima

oblik:

$$\begin{array}{r} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \\ \text{IV} \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right] \tag{7.42}$$

Definišimo matricu incidencije fundamentalnih kontura i grana $\mathbf{B}$ čiji elementi b_{ik} su definisani relacijama:

$$b_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{ako kontura } i \text{ sadrži granu } k \text{ i ako imaju saglasne smjerove} \\ -1, & \text{ako kontura } i \text{ sadrži granu } k \text{ i ako su im smjerovi suprotni} \\ 0, & \text{ako grana } k \text{ ne pripada konturi } i \end{cases}$$

Matrica incidencije fundamentalnih kontura i grana $\mathbf{B}$ ima dimenzije $N_k \times N_l$. Matrična jednačina 7.42 izražena pomoću matrice $\mathbf{B}$ ima oblik:

$$\mathbf{Bv} = 0 \tag{7.43}$$

U analiziranom primjeru numeracija grana je usvojena tako da grana–spojnica 1 formira konturu I, spojnica 2 konturu II itd. Općenito, ukoliko numeraciju grana izabereno tako da se spojnice numerišu od 1 do N_k, pri čemu k–ta spojnica formira k–tu konturu, grane stabla imaju numeraciju od $N_k + 1$ do N_l. Tada matrica $\mathbf{B}$ ima formu:

$$\mathbf{B} = [\mathbf{I}_{N_k} | \mathbf{B}_f]$$

gdje $\mathbf{I}_{N_k}$ označava jediničnu matricu dimenzija $N_k \times N_k$.

Analogno sa metodom petlji, prema KZS mogu se napisati jednačine koje povezuju struje grana $\mathbf{i}$ i struje kontura $\mathbf{j}_k$, što odgovara linearnoj transformaciji koordinata stanja. U matričnoj formi ova transformacija je definisana relacijom:

$$\mathbf{i} = \mathbf{B}^T \mathbf{j}_k \tag{7.44}$$

Iz jednačine 7.44, za numeraciju grana kao u analiziranom primjeru, izvodimo slijedeće zaključke:

- Struja grane–spojnice j jednaka je struji konture j koju formira, odnosno vrijedi $i_j = j_{kj}$, za $j = 1, 2, \cdots, N_k$. Dakle, za razliku od struja petlji, struje kontura imaju fizičko značenje.

- Struja grane stabla i_j ($j = N_k + 1, \cdots, N_l$) jednaka je algebarskoj sumi struja kontura j_{ki} koje sadrže granu j.

Jednačine kontura se mogu izraziti i pomoću matrice $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{C} = \mathbf{B}^T = [\mathbf{I}_{N_k}|\mathbf{B}_f]^T = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N_k} \\ -- \\ \mathbf{B}^T{}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N_k} \\ -- \\ \mathbf{C}_f \end{bmatrix}$$

Tada vrijedi:

$$\mathbf{i} = \mathbf{C}\mathbf{j}_k \tag{7.45}$$

odnosno:

$$i_j = \sum_{i=1}^{N_p} c_{ji} j_{ki}$$

7.4.2 Rješavanje rezistivnih mreža metodom struja kontura

Izvodjenje metoda kontura ilustrovaćemo na primjeru rješavanja rezistivnih mreža. Pretpostavimo da rezistivna mreža M ne sadrži idealne strujne izvore. Polazeći od matrične jednačine ravnoteže generalisanih grana:

$$\mathbf{v} = \mathbf{R}\mathbf{i} - \mathbf{R}\mathbf{i}_g + \mathbf{v}_g$$

uvažavajući jednačine prema KZN za konture $\mathbf{B}\mathbf{v} = 0$ i KZS, izraženih preko struja kontura $\mathbf{i} = \mathbf{B}^T\mathbf{j}_k$, analogno sa metodom petlji, izvodimo:

$$\mathbf{Z}_k\mathbf{j}_k = \mathbf{e}_k \tag{7.46}$$

gdje su:

- $\mathbf{Z}_k = (\mathbf{B}\mathbf{R}\mathbf{B}^T)$ *matrica impedansi kontura*, dimenzija $[N_k \times N_k]$, koja ima iste osobine kao i matrica impedansi petlji $\mathbf{Z}_p$.

- $\mathbf{e}_k = \mathbf{B}\mathbf{R}\mathbf{i}_g - \mathbf{B}\mathbf{v}_g$ N_k–dimenzioni *vektor napona kontura*, koji ima iste osobine kao i vektor $\mathbf{e}_p$.

Jednačina 7.46 naziva se *jednačina struja kontura* i za LVN mreže sadrži N_k nezavisnih, linearnih algebarskih jednačina sa konstantnim koeficijentima.

Struje kontura se izračunavaju prema jednačini:

$$\mathbf{j}_k = \mathbf{Z}_k^{-1}\mathbf{e}_k \tag{7.47}$$

odakle se, analogno postupku izvedenim za struje petlji, odredjuju:

- struje grana prema relaciji $\mathbf{i} = \mathbf{B}^T\mathbf{j}_k$

- naponi grana prema relaciji $\mathbf{v} = \mathbf{R}\mathbf{i} - \mathbf{R}\mathbf{i}_g + \mathbf{v}_g$

7.4.3 Direktno pisanje jednačina kontura

Za rezistivne mreže, koje ne sadrže zavisne generatore, mogu se izvesti pravila za direktno izračunavanje elemenata matrica $\mathbf{Z}_k$ i $\mathbf{e}_k$ posmatranjem strukture mreže.

Na osnovu relacije $\mathbf{Z}_k = \mathbf{BRB}^T$, mogu se definisati pravila za direktno izračunavanje vrijednosti elemenata z_{ik} matrice impedansi kontura $\mathbf{Z}_k$:

1. Dijagonalni element z_{ii} izračunava se prema relaciji:

$$z_{ii} = \sum_{j=1}^{N_l} b_{ij} R_j b_{ij} = \sum_{j=1}^{N_l} (b_{ij})^2 R_j$$

   Pošto član $(b_{ij})^2$ može imati nenultu vrijednost $(b_{ij})^2 = 1$ samo ako su kontura i i grana j incidentni možemo pisati:

$$z_{ii} = \sum_{j \in i}^{N_l} R_j \tag{7.48}$$

   gdje simbol $\sum_{j \in i}^{N_l} R_j$ označava sumu otpora svih grana j koje su incidentne sa konturom i. Odavde se izvodi sljedeće pravilo:

   Dijagonalni element z_{ii} predstavlja sumu otpora svih grana j koje su incidentne sa konturom i.

2. Vandijagonalni element z_{ik} izračunava se prema relaciji:

$$z_{ik} = \sum_{j=1}^{N_l} b_{ij} R_j b_{kj} = \sum_{j=1}^{N_l} (b_{ij} b_{kj}) R_j$$

   Član $(b_{ij} b_{kj})$ ima vrijednost (0) ako grana j nije incidentna sa jednom od kontura i i k (pošto tada vrijedi $b_{ij} = 0$ ili $b_{kj} = 0$). Kada je grana j incidentna sa obje konture, odnosno kada istovremeno pripada konturama i i k, vrijedi $b_{ij} b_{kj} = \pm 1$. Tada se može pisati:

$$z_{ik} = \pm \sum_{j \in i,k}^{N_l} R_j \tag{7.49}$$

   gdje simbol $\pm \sum_{j \in i,k}^{N_l} R_j$ označava algebarsku sumu otpora svih grana j koje su zajedničke konturama i i k. Tada vrijedi sljedeće pravilo:

   Vandijagonalni element z_{ik} predstavlja sumu otpora grana R_j, koje su zajedničke konturama i i k. Ukoliko su smjerovi kontura na zajedničkim granama saglasni, suma ima pozitivan predznak. Za suprotne smjerove predznak sume je negativan. Za konture koje nemaju zajedničku granu vrijedi $z_{ik} = 0$.

Elementi matrice napona kontura $\mathbf{e}_k$ izračunavaju se prema sljedećem postupku:

1. Mreža M se transformiše u mrežu M_1 tako da se svi strujni generatori predstave pomoću ekvivalantnih naponskih generatora generalisane grane.

2. Tada se elementi vektora $\mathbf{e}_k$ za mrežu M_1 izračunavaju na osnovu jednačine $\mathbf{e}_k = -\mathbf{B}\mathbf{v}_g$, prema sljedećoj relaciji:

$$e_{ki} = -\sum_{j=1}^{N_l} b_{ij}\ v_{gj}$$

Pošto je član sume $b_{ij} \neq 0$ samo za grane j koje su incidentne sa konturom i možemo pisati:

$$e_{ki} = -\sum_{j\in i}^{N_l} b_{ij}\ v_{gj} \qquad (7.50)$$

Odavde za transformisanu mrežu M_1 izvodimo sljedeće pravilo:

Član e_{ki} vektora $\mathbf{e}_k$ jednak je algebarskoj sumi napona naponskih generatora u granama koje pripadaju konturi. Pri tome se za naponske generatore čiji smjer se poklapa sa smjerom konture usvaja pozitivan, a za generatore čiji smjer je suprotan smjeru konture, negativan predznak.

7.5 Metod napona presjeka

U poglavlju 6.3 definisan je pojam subgrafa presjek. U ovom poglavlju subgraf presjek se definiše za izabrano fundamentalno stablo. Ovako definisani presjeci nazivaju se *fundamentalni presjeci*. Metod napona presjeka izvodi se za fundamentalne presjeke i predstavlja generalizaciju metoda napona čvorova. Izvodjenje metoda napona presjeka ilustrovano je za graf G prikazan na slici 7.9, kod koga fundamentalno stablo čine grane 5, 6, 7 i 8.

Fundamentalne presjeke čine po jedna grana stabla i odgovarajući broj granaspojnice, koje presijeca zatvorena površina presjeka. Izdvajanjem grana subgrafa presjek graf G se razdvaja na dva nepovezana dijela. Referentni (pozitivni) smjer presjeka definiše odgovarajuća grana stabla. Na slici 7.10 isprekidanim linijama su prikazani fundamentalni presjeci za graf G sa slike 7.9.

Za fundamentalne presjeke sa slike 7.10 vrijede jednačine prema KZS:

$$\begin{aligned} i_1 - i_2 + i_5 &= 0 \quad \text{presjek 1} \\ -i_1 + i_2 + i_3 + i_4 - i_6 &= 0 \quad \text{presjek 2} \\ -i_2 - i_3 - i_4 + i_7 &= 0 \quad \text{presjek 3} \\ -i_2 - i_3 + i_8 &= 0 \quad \text{presjek 4} \end{aligned} \qquad (7.51)$$

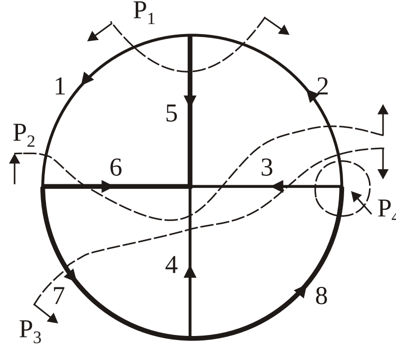


Figure 7.10: Ilustracija formiranja fundamentalnih presjeka

Jednačine 7.51, napisane u matričnoj formi, imaju oblik:

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \\ i_7 \\ i_8 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \tag{7.52}$$

Općenito, primjena KZS na fundamentalne presjeke rezultira sistemom n linearnih nezavisnih jednačina sa N_l nepoznatih struja grana $(i_k,\ k = 1, 2, \cdots, N_l)$. Definišimo *matricu incidencije grana i fundamentalnih presjeka* $\mathbf{Q}$ tako da vrijedi:

$$\mathbf{Qi} = 0 \tag{7.53}$$

Elementi q_{ik} matrice $\mathbf{Q}$ odredjuju se prema sljedećem pravilu:

$$q_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{ako presjek } i \text{ sadrži granu } k \text{ i ako imaju saglasne smjerove} \\ -1, & \text{ako presjek } i \text{ sadrži granu } k \text{ i ako su im smjerovi suprotni} \\ 0, & \text{ako grana } k \text{ ne pripada presjeku } i \end{cases}$$

Za numeraciju grana kao na grafu G matrica $\mathbf{Q}$ ima sljedeću strukturu:

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{Q}_f | \mathbf{I}_n]$$

gdje su $\mathbf{I}_n$ jedinična matrica dimenzija $n \times n$, a $\mathbf{Q}_f$ matrica incidencije grana spojnica i fundamentalnih presjeka dimenzija $n \times N_k$.

Napon svake grane grafa G možemo izraziti pomoću napona grana fundamentalnog stabla. Ako napone grana stabla obilježimo kao vektor $\mathbf{u}$, za graf G prikazan na slici 7.10 prema KZN vrijede relacije:

$$\begin{aligned} v_1 &= v_5 - v_6 = u_1 - u_2 \\ v_2 &= -v_5 + v_6 - v_7 - v_8 = -u_1 + u_2 - u_3 - u_4 \\ v_3 &= v_6 - v_7 = u_2 - u_3 \\ v_5 &= u_1 \\ v_6 &= u_2 \\ v_7 &= u_3 \\ v_8 &= u_4 \end{aligned} \tag{7.54}$$

Posmatranjem jednačina 7.54 jednostavno se dokazuje da vrijedi:

$$\mathbf{v} = \mathbf{Q}^T \mathbf{u} \tag{7.55}$$

Jednačine 7.53 i 7.55 predstavljaju jednačine Kirhofovih zakona za presjeke i nazivaju se *jednačine presjeka*.

7.5.1 Rješavanje rezistivnih mreža metodom napona presjeka

Izvodjenje metoda napona presjeka ilustrovaćemo na primjeru rješavanja rezistivne mreže. Polazeći od jednačine stanja grana:

$$\mathbf{i} = \mathbf{G}\mathbf{v} + \mathbf{i}_g - \mathbf{G}\mathbf{v}_g$$

uvažavajući $\mathbf{Q}\mathbf{i} = 0$ i uvodeći nove varijable stanja, napone presjeka preko transformacije $\mathbf{u} = \mathbf{Q}^T\mathbf{v}$, analogno sa postupkom izvodjenja jednačina napona čvorova, izvodimo jednačine napona presjeka u obliku:

$$\mathbf{Y}_q \mathbf{u} = \mathbf{i}_q \tag{7.56}$$

gdje su:

- $\mathbf{Y}_q = (\mathbf{Q}\mathbf{G}\mathbf{Q}^T)$ *matrica admitansi presjeka*, dimenzija $[n \times n]$, koja ima iste osobine kao i matrica admitansi čvorova $\mathbf{Y}_n$.
- $\mathbf{i}_q = \mathbf{Q}\mathbf{G}\mathbf{v}_g - \mathbf{Q}\mathbf{i}_g$ n–dimenzioni *vektor injektiranih struja presjeka*, koji ima iste osobine kao i vektor struja čvorova $\mathbf{i}_n$.

Naponi grana presjeka odredjuju se iz jednačine 7.56 prema relaciji:

$$\mathbf{u} = \mathbf{Y}_q^{-1} \mathbf{i}_q \tag{7.57}$$

Tada se naponi grana mreže odredjuje prema relaciji:

$$\mathbf{v} = \mathbf{Q}^T \mathbf{u}$$

odakle se onda struje grana mreže izračunavaju prema relaciji 7.10.

7.5.2 Direktno pisanje jednačina presjeka

Za rezistivne mreže, koje ne sadrže zavisne generatore, matrična jednačina presjeka, odnosno matrice $\mathbf{Y}_q$ i $\mathbf{i}_q$, mogu se direktno odrediti, na osnovu strukture analizirane mreže.

Elementi matrice $\mathbf{Y}_q$ izračunavaju se prema sljedećim pravilima:

1. *Dijagonalni element y_{ii} jednak je sumi provodnosti grana koje pripadaju presjeku i.*

2. *Vandijagonalni element y_{ik} jednak je algebarskoj sumi provodnosti svih grana koje istovremene pripadaju presjecima i i k. Ukoliko su smjerovi presjeka u zajedničkim granama saglasni preznak sume je pozitivan. Za neusaglašene smjerove presjeka suma provodnosti je negativna.*

Elementi vektora struja presjeka $\mathbf{i}_q$ izračunavaju se tako da se polazna mreža M transformiše u mrežu M_1, pri čemu se svi naponski izvori generalisanih grana zamijene ekvivalentnim strujnim generatorima. Elementi vektora $\mathbf{i}_q$ u transformisanoj mreži M_1 izračunavaju se prema pravilu:

1. *Struja presjeka k jednaka je algebarskoj sumi struja generatora u granama koje pripadaju presjeku k. Za generatore čiji je smjer saglasan sa referentnim smjerom presjeka usvaja se pozitivan predznak. U slučaju suprotnog smjera generatora predznak je negativan.*

7.5.3 Dualnost fundamentalnih kontura i presjeka

Metodi struja kontura i napona presjeka zasnovani su na definisanju fundamentalnog stabla S. Matrice incidencije $\mathbf{B}$ i $\mathbf{Q}$ definišu incidenciju grana grafa prema fundamentalnim konturama i fundamentalnim presjecima. Ovako definisane matrice incidencije su medjusobno povezane. U nastavku ovog poglavlja izvedena je veza izmedju matrica $\mathbf{B}$ i $\mathbf{Q}$.

Pomoću matrica incidencije mogu se izraziti KZN relacijama:

$$\mathbf{B}\mathbf{v} = 0$$

ili

$$\mathbf{v} = \mathbf{Q}^T\mathbf{u}$$

Substitucijom vektora $\mathbf{v}$ u prvu jednačinu slijedi:

$$\mathbf{B}\mathbf{Q}^T\mathbf{u} = 0 \tag{7.58}$$

Jednačina 7.58 vrijedi za svako fundamentalno stablo, odnosno za proizvoljno odabrani vektor $\mathbf{u}$. Odatle vrijedi:

$$\mathbf{B}\mathbf{Q}^T = 0 \tag{7.59}$$

Proizvod $\mathbf{BQ}^T$ je matrica dimenzija $N_k \times n$, čiji svaki element ik sadrži dva nenulta člana. Analizom elemenata izraza 7.59 jednostavno se dokazuje da vrijedi:

$$\mathbf{QB}^T = 0$$

Ukoliko numeraciju grana grafa odredimo tako da su spojnice numerisane od 1 do N_k a grane stabla od $N_k + 1$ do N_l tada vrijedi:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= [\mathbf{I}_{N_l}|\mathbf{B}_f] \\ \mathbf{Q} &= [\mathbf{Q}_f|\mathbf{I}_n] \end{aligned}$$

Tada iz jednačine 7.59 slijedi:

$$\begin{aligned} \mathbf{BQ}^T &= [\mathbf{I}_{N_l}|\mathbf{B}_f] \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_f^T \\ -- \\ \mathbf{I}_n \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{I}_{N_l}\mathbf{Q}_f^T + \mathbf{B}_f\mathbf{I}_n = \mathbf{Q}_f^T + \mathbf{B}_f = 0 \end{aligned}$$

Odakle je:

$$\mathbf{Q}_f^T = -\mathbf{B}_f$$

ili:

$$\mathbf{Q}_f = -\mathbf{B}_f^T$$

Konačno, matrica incidencije fundamentalnih presjeka može se izraziti u formi:

$$\mathbf{Q} = [-\mathbf{B}_f^T|\mathbf{I}_n]$$

Iz prethodnog zaključujemo da su metodi kontura i presjeka dualni. Dualnost vrijedi za opšti graf i ne zahtijeva se da graf bude planaran. Dakle, koncepti kontura i presjeka opštiji su od koncepta petlji i čvorova.

7.5.4 Izbor matričnog metoda

Analogija izmedju izvedenih metoda, koje su bazirane na transformaciji varijabli stanja, izražena je relacijama:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_n &= \mathbf{AGA}^T \text{ - za metod čvorova} \\ \mathbf{Z}_p &= \mathbf{MRM}^T \text{ - za metod petlji} \\ \mathbf{Z}_k &= \mathbf{BRB}^T \text{ - za metod kontura} \\ \mathbf{Y}_q &= \mathbf{QGQ}^T \text{ - za metod presjeka} \end{aligned}$$

Svi opisani metodi, transformacijom varijabli stanja smanjuju broj varijabli koje treba izračunati: na $N_p = N_k$ u metodima petlji i kontura i na n u metodima čvorova i presjeka. Koji će od opisanih metoda da rezultira manjim brojem varijabli zavisi od strukture grafa. Ukoliko graf sadrži manje grana stabla od grana

spojnica tada su efikasniji metodi čvorova i presjeka. U suprotnom, efikasniji su metodi petlji i kontura. Prilikom direktnog pisanja jednačina uticaj na jednostavnost primjene pojedinih metoda ima broj i tip generatora. Ukoliko mreža sadrži večinom strujne generatore jednostavnije je primjeniti metode čvorova ili presjeka, a ukoliko sadrži naponske generatore metode petlji ili kontura.

7.6 Analiza stacionarnog odziva pri sinusnoj pobudi

U ovom poglavlju ilustrovana je primjenu metoda napona čvorova i struja petlji u analizi stacionarnog odziva LVN mreža pri djelovanju sinusne pobude. U nastavku poglavlja ovaj odziv se naziva *stacionarni odziv.* Pri tome se koristiti fazorsko predstavljanje varijabli stanja i model mreže u frekventnom domenu. Primjena metoda napona presjeka i struja kontura za stacionarni odziv jednostavno se izvodi iz metoda cvorova i petlji.

Za stacionarni odziv generalisana grana kola ima isti oblik kao na slici 7.2, samo što umjesto otpora grane R_k šema sadrži impedansu grane $\underline{Z}_k = R_k + jX_k$. U opštem slučaju za RLC mreže reaktansa X_k ima oblik:

$$jX_k = j\omega L_k + \frac{1}{j\omega C_k}$$

Tada odgovarajuća impedansa grane $\underline{Z}_k$ ima oblik:

$$\underline{Z}_k = R_k + jX_k$$

Jednačina stanja grane k, napisana za fazore napona i struja, onda ima oblik:

$$\underline{V}_k = \underline{Z}_k\,(\underline{I}_k - \underline{I}_{gk}) + \underline{V}_{gk} \tag{7.60}$$

gdje su $\underline{I}_k$ i $\underline{V}_k$ fazori struja i napona grane k. Fazori $\underline{I}_{gk}$ i $\underline{V}_{gk}$ prestavljaju fazore pobudnih signala strujnog i naponskog generatora. Tada jednačine stanja grana, napisane u matričnoj formi, imaju oblik:

$$\underline{\mathbf{V}} = \underline{\mathbf{Z}}\,\underline{\mathbf{I}} - \underline{\mathbf{Z}}\,\underline{\mathbf{I}}_g + \underline{\mathbf{V}}_g \tag{7.61}$$

Kvadratna matrica $\underline{\mathbf{Z}}$ dimenzije $(N_l \times N_l)$ naziva se *matrica impedansi grana.* Pošto RLC-mreža ne sadrži spregnute elemente matrica $\underline{\mathbf{Z}}$ ima isti strukturu kao i matrica $\mathbf{R}$, odnosno matrica $\underline{\mathbf{Z}}$ je dijagonalna matrica, čiji su dijagonalni elementi $\underline{Z}_{ii}$ jednaki odgovarajućim admitansama grana $\underline{Z}_i$.

Admitansa grane $\underline{Y}_k$ ima oblik:

$$\underline{Y}_k = (\underline{Z}_k)^{-1} = G_k + jB_k$$

Jednačina stanja grane k, napisana pomoću admitanse grane su:

$$\underline{I}_k = \underline{Y}_k\,\underline{V}_k + \underline{I}_{gk} - \underline{Y}_k\,\underline{V}_{gk} \tag{7.62}$$

Jednačine stanja grana, napisane u matričnoj formi, imaju oblik:

$$\underline{\mathbf{I}} = \underline{\mathbf{Y}}\,\underline{\mathbf{V}} + \underline{\mathbf{I}}_g - \underline{\mathbf{Y}}\,\underline{\mathbf{V}}_g \tag{7.63}$$

Kvadratna matrica $\underline{\mathbf{Y}}$ dimenzije $(N_l \times N_l)$ naziva se *matrica admitansi grana.* Za RLC-mreža matrica $\underline{\mathbf{Y}}$ ima isti strukturu kao i matrica $\mathbf{G}$, odnosno matrica $\underline{\mathbf{Y}}$ je dijagonalna matrica, čiji su dijagonalni elementi $\underline{Y}_{ii}$ jednaki odgovarajućim admitansama grana $\underline{Y}_i$.

7.6.1 Metod napona čvorova

U ovom poglavlju opisana je primjena metoda napona čvorova pri rješavanju stacionarnog odziva linearnih mreža za sljedeće slučajeve:

- RLC mreže, koje ne sadrže spregnute elemente
- RLCM mreže, koje sadrže spregnute zavojnice
- mreže koje sadrže zavisne generatore

Jednačine čvorova za LVN mreže koje ne sadrže magnetno spregnute zavojnice

Matrična forma jednačina čvorova za stacionarni odziv ima oblik:

$$\underline{\mathbf{Y}}_n \underline{\mathbf{V}}_n = \underline{\mathbf{I}}_n \tag{7.64}$$

gdje su:

- $\underline{\mathbf{V}}_n$ - *vektor fazora napona čvorova*
- $\underline{\mathbf{I}}_n$ - *vektor fazora struja čvorova*
- $\underline{\mathbf{Y}}_n$ - simetrična (kvadratna) *matrica admitansi čvorova.*

Matrica $\underline{\mathbf{Y}}_n$ definisana je relacijom:

$$\underline{\mathbf{Y}}_n = \mathbf{A}\underline{\mathbf{Y}}\mathbf{A}^T \tag{7.65}$$

a vektor fazora struja čvorova $\underline{\mathbf{I}}_n$ relacijom:

$$\underline{\mathbf{I}}_n = \mathbf{A}\underline{\mathbf{Y}}\,\underline{\mathbf{V}}_g - \mathbf{A}\underline{\mathbf{I}}_g \tag{7.66}$$

Elementi matrica $\underline{\mathbf{Y}}_n$ i $\underline{\mathbf{I}}_n$ za mreže koje ne sadrže spregnute elemente izračunavaju se prema pravilima koja su izvedena za rezistivne mreže.

Vektor fazora napona čvorova $\underline{\mathbf{V}}_n$ tada se izračunava prema relaciji:

$$\underline{\mathbf{V}}_n = (\underline{\mathbf{Y}}_n)^{-1}\,\underline{\mathbf{I}}_n = \underline{\mathbf{Z}}_n\,\underline{\mathbf{I}}_n \tag{7.67}$$

a vektor fazora varijabli stanja mreže, napona grana $\underline{\mathbf{V}}$ i struja grana $\underline{\mathbf{I}}$, na osnovu izračunatih napona čvorova prema relacijama:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{V}} &= \mathbf{A}^T \underline{\mathbf{V}}_n \\ \underline{\mathbf{I}} &= \underline{\mathbf{Y}}\,\underline{\mathbf{V}} + \underline{\mathbf{I}}_g - \underline{\mathbf{Y}}\,\underline{\mathbf{V}}_g \end{aligned}$$

Jednačine čvorova za LVN mreže koje sadrže magnetno spregnute zavojnice

Ukoliko LVN mreža sadrži magnetno spregnute zavojnice tada matrica impedansi grana $\underline{\mathbf{Z}}$ nije dijagonalna matrica, a time ni matrica admitansi grana $\underline{\mathbf{Y}}$. Uticaj magnetno spregnutih zavojnica na jednačine čvorova ilustrovaćemo na primjeru rješavanja stacionarnog stanja mreže prikazane na slici 7.11.

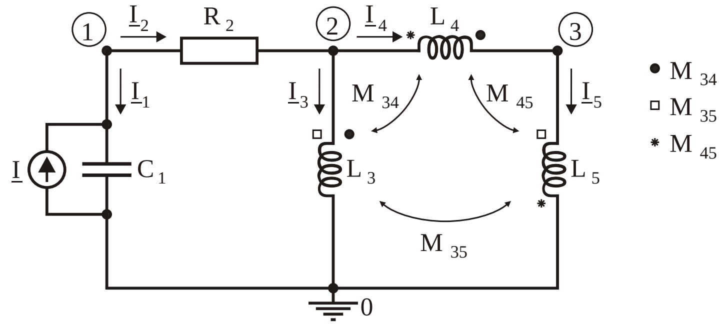


Figure 7.11: Metod napona čvorova za mrežu sa magnetno spregnutim zavojnicama

Induktiviteti i medjuinduktiviteti spregnutih grana definisani su matricom induktansi grana $\mathbf{L}$:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_3 & -M_{34} & M_{35} \\ -M_{34} & L_4 & -M_{45} \\ M_{35} & -M_{34} & L_5 \end{bmatrix}$$

Ukoliko grane koje sadrže spregnute zavojnice numerišemo u sukcesivnom nizu, matrica induktansi grana $\mathbf{L}$ je blok-dijagonalna simetrična (kvadratna) matrica.

Matrica impedansi grana za analiziranu mrežu tada ima oblik:

$$\underline{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{j\omega C_1} & & & & \\ & R_2 & & & \\ & & j\omega L_3 & -j\omega M_{34} & j\omega M_{35} \\ & & -j\omega M_{34} & j\omega L_3 & -j\omega M_{45} \\ & & j\omega M_{35} & -j\omega M_{45} & j\omega L_5 \end{bmatrix}$$

Za ovakav način numeracije grana matrica impedansi grana $\underline{\mathbf{Z}}$ je simetrična, blok-dijagonalna matrica. Blok dijagonalna struktura simetričnih matrica pogodna je za izračunavanje inverzne matrice:

$$\underline{\mathbf{Y}} = \underline{\mathbf{Z}}^{-1}$$

Za kolo prikazano na slici 7.11 takodje vrijedi:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{V}}_g &= 0 \\ \underline{I}_{g1} &= \underline{I} \\ \underline{I}_{gi} &= 0, \ i = 2, 3, 4, 5 \end{aligned}$$

Tada matrična jednačina stanja grana za analiziranu mrežu ima oblik:

$$\begin{bmatrix} \underline{V}_1 \\ \underline{V}_2 \\ \underline{V}_3 \\ \underline{V}_4 \\ \underline{V}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{j\omega C_1} & & & & \\ & R_2 & & & \\ & & j\omega L_3 & -j\omega M_{34} & j\omega M_{35} \\ & & -j\omega M_{34} & j\omega L_3 & -j\omega M_{45} \\ & & j\omega M_{35} & -j\omega M_{45} & j\omega L_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_3 \\ \underline{I}_4 \\ \underline{I}_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$- \begin{bmatrix} \frac{1}{j\omega C_1} & & & & \\ & R_2 & & & \\ & & j\omega L_3 & -j\omega M_{34} & j\omega M_{35} \\ & & -j\omega M_{34} & j\omega L_3 & -j\omega M_{45} \\ & & j\omega M_{35} & -j\omega M_{45} & j\omega L_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ukoliko elementi matrice $\mathbf{L}$ imaju vrijednosti:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \\ 1 & -\frac{4}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

tada matrica $\mathbf{L}^{-1}$ ima oblik:

$$\mathbf{L}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

odnosno matrica admitansi grana $\underline{\mathbf{Y}} = \underline{\mathbf{Z}}^{-1}$ ima oblik:

$$\underline{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} j\omega C_1 & & & & \\ & G_2 & & & \\ & & \frac{3}{j\omega} & \frac{1}{j\omega} & -\frac{1}{j\omega} \\ & & \frac{1}{j\omega} & \frac{2}{j\omega} & \frac{1}{j\omega} \\ & & -\frac{1}{j\omega} & \frac{1}{j\omega} & \frac{2}{j\omega} \end{bmatrix} \tag{7.68}$$

Za usvojenu numeraciju grana uočavamo da matrica $\underline{\mathbf{Y}}$ ima simetričnu, blok-dijagonalnu strukturu. Takodje izvodimo zaključak da za mreže koje sadrže magnetno spregnute zavojnice nije moguće direktno napisati matricu admitansi grana $\underline{\mathbf{Y}}$.

Za analizirani primjer matrica admitansi čvorova $\underline{Y}_n$ ima oblik:

$$\underline{\mathbf{Y}}_n = \mathbf{A}\underline{\mathbf{Y}}\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} j\omega C_1 + G_2 & -G_2 & 0 \\ -G_2 & G_2 + \frac{7}{j\omega} & -\frac{3}{j\omega} \\ 0 & -\frac{3}{j\omega} & \frac{2}{j\omega} \end{bmatrix} \tag{7.69}$$

Uočavamo da matrica $\underline{\mathbf{Y}}_n$ za ovaj slučaj ima simetričnu strukturu. *Elemente matrice $\underline{\mathbf{Y}}_n$ za kola koja sadrže spregnute zavojnice nije moguće direktno odrediti.*

Jednačine čvorova za LVN mreže koje sadrže zavisne generatore

Izvodjenje jednačina čvorova za mreže koje sadrže linearne zavisne generatore ilustrovaćemo na primjeru mreže koja je prikazana na slici 7.12.

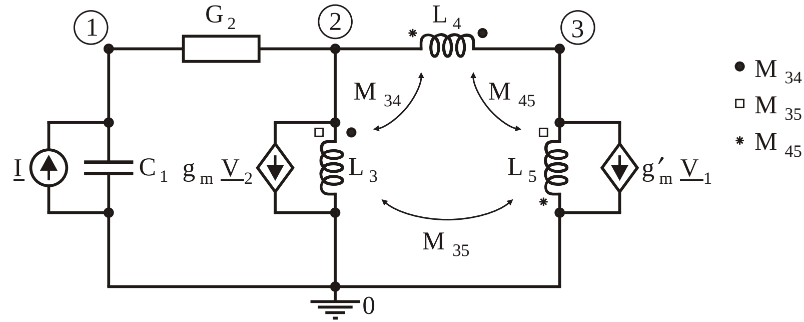


Figure 7.12: Metod napona čvorova za mrežu sa linearnim zavisnim generatorima

Mreža M prikazana na slici 7.12 izvedena je iz mreže sa slike 7.11 dodavanjem linearnih, naponski kontrolisanih strujnih genaratora $g_m V_2$ i $g'_m V_1$. Za grane mreže

u kojima se nalaze spregnuti elementi (magnetno spregnute zavojnice i zavisni generatori) vrijede jednačine:

$$\begin{bmatrix} \underline{V}_3 \\ \underline{V}_4 \\ \underline{V}_5 \end{bmatrix} = j\omega \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \\ 1 & -\frac{4}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_{L_3} \\ \underline{I}_4 \\ \underline{I}_{L_5} \end{bmatrix}$$

odakle je:

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_{L_3} \\ \underline{I}_4 \\ \underline{I}_{L_5} \end{bmatrix} = \frac{1}{j\omega} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{V}_3 \\ \underline{V}_4 \\ \underline{V}_5 \end{bmatrix} \tag{7.70}$$

Izražavajući struje zavisnih generatora preko napona:

$$\begin{aligned} I_3 &= I_{L_3} + g_m V_2 \\ I_5 &= I_{L_5} + g'_m V_1 \end{aligned}$$

uvrštavanjem u jednačinu 7.70 izvodimo:

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_3 \\ \underline{I}_4 \\ \underline{I}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & g_m & \frac{3}{j\omega} & \frac{1}{j\omega} & -\frac{1}{j\omega} \\ 0 & 0 & \frac{1}{j\omega} & \frac{2}{j\omega} & \frac{1}{j\omega} \\ g'_m & 0 & -\frac{1}{j\omega} & \frac{1}{j\omega} & \frac{2}{j\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{V}_1 \\ \underline{V}_2 \\ \underline{V}_3 \\ \underline{V}_4 \\ \underline{V}_5 \end{bmatrix}$$

Tada matrica admitansi grana $\underline{\mathbf{Y}}$ ima vrijednost:

$$\underline{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} j\omega C_1 & & & & \\ & G_2 & & & \\ & g_m & \frac{3}{j\omega} & \frac{1}{j\omega} & -\frac{1}{j\omega} \\ & & \frac{1}{j\omega} & \frac{2}{j\omega} & \frac{1}{j\omega} \\ g'_m & & -\frac{1}{j\omega} & \frac{1}{j\omega} & \frac{2}{j\omega} \end{bmatrix} \tag{7.71}$$

Analizom strukture matrice $\underline{\mathbf{Y}}$ *uočavamo da matrica nije simetrična. Poredjenjem izraza za matricu grana* $\underline{\mathbf{Y}}$ *za kolo sa i bez zavisnih generatora, uočavamo da uključivanje zavisnih generatora u mrežu ne utiče na elemente matrice* $\underline{\mathbf{Y}}$ *koji odgovaraju granama, koje ne sadrže zavisne generatore.* Ova osobina LVN mreža koristi se prilikom izvodjenja pravila za direktno izračunavanje elemenata matrice $\underline{\mathbf{Y}}$.

Matricu admitansi čvorova $\underline{\mathbf{Y}}_n$ odredjujemo prema relaciji:

$$\underline{\mathbf{Y}}_n = \mathbf{A}\underline{\mathbf{Y}}\mathbf{A}^T$$

odakle za posmatrano kolo slijedi:

$$\underline{\mathbf{Y}}_n = \begin{bmatrix} j\omega C_1 + G_2 & -G_2 & 0 \\ -G_2 + g_m & G_2 - g_m + \frac{7}{j\omega} & -\frac{3}{j\omega} \\ g'_m & -\frac{3}{j\omega} & \frac{2}{j\omega} \end{bmatrix} \tag{7.72}$$

Matrica $\underline{\mathbf{Y}}_n$ nema simetričnu strukturu. Poredjenjem strukture matrice $\underline{\mathbf{Y}}_n$ u relacijama 7.69 i 7.72 uočavamo da *kod mreža koje sadrže zavisne izvore nema uticaja zavisnih generatora na vrijednosti elemenata matrice* $\underline{\mathbf{Y}}_n$*, koji odgovaraju pasivnim elemenatima.* Na osnovu ove činjenice izvodi se sljedeći postupak za sistematično direktno pisanje jednačina čvorova:

1. *Zavisni izvori se tretiraju kao nezavisni i uključuju se u matricu struja čvorova* $\underline{\mathbf{I}}_n$.

2. *Elementi matrice admitansi čvorova* $\underline{\mathbf{Y}}_n$ *odredjuju se prema pravilima za mreže, koje ne sadrže zavisne izvore.*

3. *Konačno, matrica admitansi čvorova* $\underline{\mathbf{Y}}_n$ *modifikuje se tako da se uticaji zavisnih izvora izraze preko napona čvorova.*

Opisani postupak ilustrovaćemo na prethodnom primjeru. Zavisne generatore predstavljamo kao nezavisne uvodeći oznake:

$$\begin{aligned} \underline{I}_{g3} &= g_m \underline{V}_2 \\ \underline{I}_{g5} &= g'_m \underline{V}_1 \end{aligned}$$

Tada jednačine čvorova imaju oblik:

$$\begin{bmatrix} j\omega C_1 + G_2 & -G_2 & 0 \\ -G_2 & G_2 + \frac{7}{j\omega} & -\frac{3}{j\omega} \\ 0 & -\frac{3}{j\omega} & \frac{2}{j\omega} \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} \underline{V}_{n1} \\ \underline{V}_{n2} \\ \underline{V}_{n3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{I} \\ -g_m \underline{V}_2 \\ -g'_m \underline{V}_1 \end{bmatrix} \right.$$

Uvažavajući:

$$\begin{aligned} \underline{V}_2 &= \underline{V}_{n1} - \underline{V}_{n2} \\ \underline{V}_1 &= \underline{V}_{n1} \end{aligned}$$

izražavamo uticaj zavisnih izvora preko napona čvorova:

$$\begin{aligned} -g_m \underline{V}_2 &= -g_m(\underline{V}_{n1} - \underline{V}_{n2}) \\ -g'_m \underline{V}_1 &= -g'_m \underline{V}_{n1} \end{aligned}$$

Tada modifikovana jednačina čvorova poprima oblik:

$$\begin{bmatrix} j\omega C_1 + G_2 & -G_2 & 0 \\ -G_2 + g_m & G_2 - g_m + \frac{7}{j\omega} & -\frac{3}{j\omega} \\ g'_m & -\frac{3}{j\omega} & \frac{2}{j\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{V}_{n1} \\ \underline{V}_{n2} \\ \underline{V}_{n3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{I} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

tako da je izraz za matricu admitansi čvorova $\underline{\mathbf{Y}}_n$ identičan sa izrazom u relaciji 7.72.

7.6.2 Metod struja petlji

Za stacionarni odziv struje petlji predstavimo pomoću fazora struja petlji $\underline{J}_k$, $k=1,2,\ldots,N_p$. Jednačine stanja LVN mreže, napisane pomovu Kirhofovih zakona tada imaju oblik:

$$\mathbf{M}\underline{\mathbf{V}} = 0 \tag{7.73}$$
$$\underline{\mathbf{I}} = \mathbf{M}^T\underline{\mathbf{J}} \tag{7.74}$$

Jednačine grana pišemo u matričnom obliku:

$$\underline{\mathbf{V}} = \underline{\mathbf{Z}}\,\underline{\mathbf{I}} - \underline{\mathbf{Z}}\,\underline{\mathbf{I}}_g + \underline{\mathbf{V}}_g \tag{7.75}$$

Matrica impedansi grana $\underline{\mathbf{Z}}$ definisana je u sekciji 7.6.1. Jednačine prema metodu struja petlji za stacionarni odziv imaju oblik:

$$(\mathbf{M}\mathbf{Z}\mathbf{M}^T)\underline{\mathbf{J}} = \mathbf{M}\underline{\mathbf{Z}}\underline{\mathbf{I}}_g - \mathbf{M}\underline{\mathbf{V}}_g \tag{7.76}$$

Ako definišemo matricu $\underline{\mathbf{Z}}_p$:

$$\underline{\mathbf{Z}}_p = \mathbf{M}\underline{\mathbf{Z}}\mathbf{M}^T$$

dimenzije $(N_p \times N_p)$, koja se naziva se matrica impedansi petlji i vektor fazora naponskih generatora (elektromotornih sila) petlji $\underline{\mathbf{E}}_p$:

$$\underline{\mathbf{E}}_p = \mathbf{M}\underline{\mathbf{Z}}\underline{\mathbf{I}}_g - \mathbf{M}\underline{\mathbf{V}}_g$$

dimenzije $(N_p \times 1)$, jednačinu stanja mreže možemo pisati u obliku:

$$\underline{\mathbf{Z}}_p\underline{\mathbf{J}} = \underline{\mathbf{E}}_p \tag{7.77}$$

Jednačina 7.78 predstavlja matrični oblik jednačina petlji. Struje petlji $\underline{\mathbf{J}}$ tada se izračunavaju prema relaciji:

$$\underline{\mathbf{J}} = (\underline{\mathbf{Z}}_p)^{-1}\underline{\mathbf{E}}_p \tag{7.78}$$

Izračunavanje struja petlji $\underline{\mathbf{J}}$ zahtijeva izračunavanje inverzne matrice $(\underline{\mathbf{Z}}_p)^{-1}$. Kada se izračunaju fazori struja petlji, fazore struja grana $\underline{\mathbf{I}}$ izračunavamo prema relaciji:

$$\underline{\mathbf{I}} = \mathbf{M}^T\underline{\mathbf{J}}$$

a naponi grana $\underline{\mathbf{V}}$ prema relaciji:

$$\underline{\mathbf{V}} = \underline{\mathbf{Z}}\,\underline{\mathbf{I}} - \underline{\mathbf{Z}}\,\underline{\mathbf{I}}_g + \underline{\mathbf{V}}_g$$

Direktno odredjivanje jednačina petlji za RLC mreže

Za LVN mreže koje ne sadrže spregnute elemente (RLC mreže) moguće je direktno formirati matricu impedansi petlji $\underline{\mathbf{Z}}_p$, na osnovu relacija koje su izvedene za rezistivne mreže. Postupak direktnog formiranja matrice $\underline{\mathbf{Z}}_p$ ilustrovaćemo za mrežu prikazanu na slici 7.13.

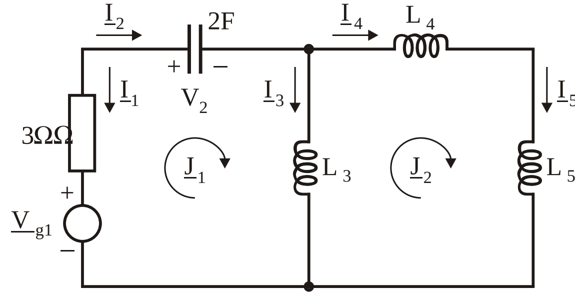


Figure 7.13: Ilustracija direktnog formiranja matrice impedansi petlji $\underline{\mathbf{Z}}_p$ za RLC mreže

Matrica induktiviteta **L** ima vrijednosti:

$$L = \begin{bmatrix} L_3 & & \\ & L_4 & \\ & & L_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & & \\ & 4 & \\ & & 5 \end{bmatrix}$$

Za naznačene referentne smjerove grana matrica **M** ima vrijednost:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrica impedansi grana $\underline{\mathbf{Z}}$ ima dijagonalnu strukturu i vrijednost:

$$\underline{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2j\omega} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3j\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4j\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5j\omega \end{bmatrix} \tag{7.79}$$

Matrica impedansi petlji odredjuje se prema relaciji:

$$\underline{\mathbf{Z}}_n = \mathbf{M}\underline{\mathbf{Z}}\mathbf{M}^T$$

odakle za analiziranu mrežu slijedi:

$$\underline{\mathbf{Z}}_n = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2j\omega} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3j\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4j\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5j\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & \frac{1}{2j\omega} & 3j\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3j\omega & 4j\omega & 5j\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 + \frac{1}{2j\omega} + 3j\omega & -3j\omega \\ -3j\omega & 3j\omega + 4j\omega + 5j\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 + \frac{1}{2j\omega} + 3j\omega & -3j\omega \\ -3j\omega & 12j\omega \end{bmatrix} \quad (7.80)$$

Inspekcijom elemenata matrice $\underline{\mathbf{Z}}_p$, metodom indukcije, izvodimo sljedeće zaključke:

1. *Matrica impedansi petlji $\underline{\mathbf{Z}}_p$ je simetrična matrica.*
2. *Dijagonalni elementi $\underline{Z}_{ii}$ jednaki su sumi impedansi grana koje čine petlju i i nazivaju se sopstvene impedanse petlji.*
3. *Vandijagonalni elementi $\underline{Z}_{ij}$ jednaki su negativnoj sumi impedansi grana koje su zajedničke za petlje i i j.* Uočimo da su smjerovi unutrasnjih petlji, radi usvojenog pravila o referentnim smjerovima petlji, na zajedničkim granama suprostavljeni. Impedanse $\underline{Z}_{ij}$ nazivaju se medjusobne impedanse petlji. Ukoliko petlje nemaju zajedničkih grana vrijedi $\underline{Z}_{ij} = 0$.

Mreža na slici 7.13 sadrži samo naponske izvore. Tada je vektor elektromotornih sila petlji definisan relacijama:

$$\underline{\mathbf{E}}_p = -M\underline{\mathbf{V}}_g$$

odakle je za analiziranu mrežu:

$$\begin{bmatrix} \underline{E}_1 \\ \underline{E}_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{V}_{g1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{V}_{g1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.81)$$

Na osnovu inspekcije izraza za matricu $\underline{\mathbf{E}}_p$ možemo izvesti zaključak da se *elementi matrice $\underline{E}_p$ izračunavaju kao algebarska suma svih naponskih izvora u granama koje pripadaju petlji.* Pri tome naponski izvori čiji smjer je saglasan sa smjerom petlje imaju pozitivan predznak a izvori sa suprotnim smjerom nagativan.

Ukoliko mreža sadrži strujne generatore izvedeno pravilo možemo primijeniti i na ove mreže tako, da se strujni izvori zamijene ekvivalentnim naponskim prema transformaciji koja je opisana u poglavlju 7.2.4.

Jednačine petlji za mreže koje sadrže magnetno spregnute zavojnice

Za mreže koje sadrže spregnute elemente pokazali smo da matrica impedansi grana $\underline{\mathbf{Z}}$ nije dijagonalna matrica. Uticaj magnetnih sprega na jednačine petlji ilustrovaćemo na primjeru izvodjenja jednačina za mrežu prikazanu na slici 7.14.

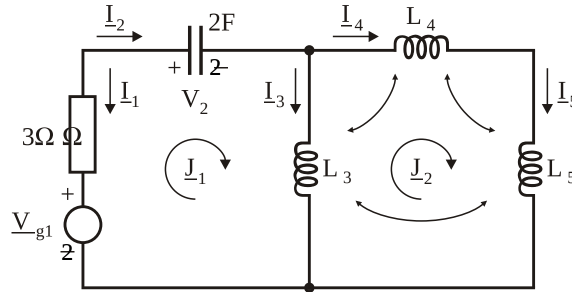


Figure 7.14: Ilustracija direktnog formiranja jednačina petlji za mreže koje sadrže magnetno spregnute zavojnice

Matrica induktiviteta **L**, za smjerove struja prikazane na slici, ima vrijednosti:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_3 & L_{34} & L_{35} \\ L_{43} & L_4 & L_{45} \\ L_{53} & L_{54} & L_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Za prikazanu mrežu matrica impedansi grana ima oblik:

$$\underline{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2j\omega} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3j\omega & j\omega & -j\omega \\ 0 & 0 & j\omega & 4j\omega & 2j\omega \\ 0 & 0 & -j\omega & 2j\omega & 5j\omega \end{bmatrix} \tag{7.82}$$

Tada matrica impedansi petlji $\underline{\mathbf{Z}}_n$ ima oblik:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{Z}}_n &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2j\omega} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3j\omega & j\omega & -j\omega \\ 0 & 0 & j\omega & 4j\omega & 2j\omega \\ 0 & 0 & -j\omega & 2j\omega & 5j\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3 & \frac{1}{2j\omega} & 3j\omega & j\omega & -j\omega \\ 0 & 0 & -3j\omega + j!\omega - j\omega & -j\omega + 4j\omega + 2j\omega & j\omega + 2j\omega + 5j\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 3+\frac{1}{2j\omega}+3j\omega & -3j\omega+j\omega-j\omega \\ -3j\omega+j\omega-j\omega & 3j\omega+4j\omega+5j\omega+(j\omega-j\omega)+(-j\omega+2j\omega)+(j\omega+2j\omega) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3+\frac{1}{2j\omega}+3j\omega & -3j\omega \\ -3j\omega & 16j\omega \end{bmatrix} \quad (7.83)$$

Inspekcijom vandijagonalnih elemenata matrice $\underline{\mathbf{Z}}_p$ uočavamo da magnetne sprege utiču na vandijagonalne elemente izmedju petlji, koje sadrže grane sa magnetno-spregnutim zavojnicama. Odavde se, metodom indukcije i inspekcijom izraza za vandijagonalne elemente, može zaključiti:

1. *Magnetne sprege imaju isti uticaj na struje petlji kao i na struje grana.*

2. *Za petlje i i j koje sadrže grane koje su magnetno spregnute (koeficijent sprege $\pm j\omega M$), vandijagonalni članovi $Z_{ik} = Z_{ki}$ imaju vrijednost jednaku medjusobnoj impedansi spregnutih grana $Z_{ik} = \pm j\omega M$.*

3. *Predznak magnetne sprege (+ ili -) odredjuje se zavisno od smjera struja petlji u odnosu na znak magnetne sprege. Ako su smjerovi struja petlji saglasni u odnosu na znak sprege usvaja se predznak (+) u suprotnom usvaja se predznak (-).*

U prethodnom primjeru struja petlje $\underline{J}_1$ obuhvata zavojnicu L_3, koja je spregnuta sa zavojnicama L_4 i L_5, koje obuhvata struja petlje $\underline{J}_2$. Odgovarajući medjuinduktiviteti su +1 i -1, respektivno. Medjusobna impedansa tada ima vrijednost $-3j\omega + (j\omega - j\omega)$. Prema tome, na vrijednost vandijagonalnih elemenata matrice $\underline{\mathbf{Z}}_p$ utiču impedanse zajedničkih grana i impedanse uslijed induktivnih sprega grana koje sadrže petlje. Zbog toga se uvodi pojam *magnetne sprege petlji.*

Inspekcijom dijagonalnog člana za petlju 2, koja sadrži grane sa zavojnicama koje su spregnute, uvidjamo da se uticaj ovakve sprege uvažava dva puta ($2j\omega$, $2j\omega$ i $-2j\omega$). Predznak ovakve sprege odredjuje se prema uskladjenosti smjera petlje i oznaka magnetne sprege.

Analizom ilustrovanog primjera zaključujemo da se za LVN mreže, koje sadrže magnetno spregnute zavojnice, matrica impedansi petlji može napisati direktno, na osnovu inspekcije strukture mreže.

Ukoliko ovakve mreže sadrže i nezavisne strujne generatore potrebno je iste prikazati pomoću ekvivalentnih naponskih generatora. Za rezistivne mreže ovaj proces transformacije je opisan u sekciji 7.2.4. Za slučaj da se ekivalentovanje vrši preko grane koja sadrži magnetno spregnuta zavojnica, kao što je prikazano na slici 7.15, neophodno je kompenzirati uticaj ubacivanja naponskog izvora u grani, koja je magnetno spregnuta.

Proces ubacivanja naponskog generatora u granu k ima uticaj na napon spregnute grane m, koji je potrebno kompenzirati tako da jednačina stanja grane m ostane nepromijenjena. Jednačine stanja za grane k i m prije transformacije imaju oblik:

$$\underline{V}_k = \underline{V}_{gk} + j\omega L_k(\underline{I}_k - \underline{I}_{gk}) + j\omega M \underline{I}_m \quad (7.84)$$

$$\underline{V}_m = j\omega L_m \underline{I}_m + j\omega M(\underline{I}_k - \underline{I}_{gk}) \quad (7.85)$$

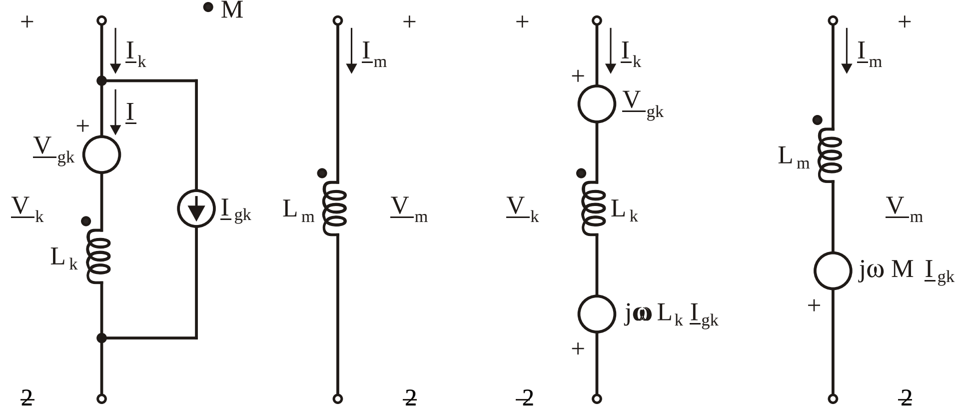


Figure 7.15: Ekvivalentovanje strujnih generatora preko grana koje sadrže magnetno spregnute zavojnice

Zamjenom strujnog generatora sa naponskim jednačina stanja za granu k ima oblik:

$$\underline{V}_k = (\underline{V}_{gk} - j\omega L_k \underline{I}_{gk}) + j\omega L_k \underline{I}_k + j\omega M \underline{I}_m \tag{7.86}$$

što je identično jednačini stanja 7.84 za originalno kolo. Pošto u transformisanoj grani k struja $\underline{I}_k$ protiče kroz zavojnicu L_k (umjesto struje $\underline{I}_k - \underline{I}_{gk}$) uticaj magnetne sprege na granu m je $j\omega M \underline{I}_k$ (umjesto $j\omega M(\underline{I}_k - \underline{I}_{gk})$). Da bi jednačina stanja grane m ostala nepromijenjena i nakon transformacije trebamo u granu m ubaciti naponski generator koji će kompenzirati nastalu promjenu. Naponski generator koji se ubacuje u granu m ima vrijednost $j\omega M \underline{I}_{gk}$. Smjer generatora se odredjuje tako da u odnosu na znak magnetne sprege generiše struju koja je suprotna struji koju generiše elektromotorna sila $j\omega M \underline{I}_k$. Na slici 7.15.b označen je smjer generatora $j\omega M \underline{I}_{gk}$. Sa slike se vidi da je *smjer generatora* $j\omega M \underline{I}_{gk}$ *prema znaku magnetne sprege u konturi* m *isti kao i smjer generatora* $j\omega L_k I_{gk}$ *prema znaku magnetne sprege u konturi* k. Tada jednačina stanja za konturu m ima oblik:

$$\underline{V}_m = -j\omega M \underline{I}_{gk} + j\omega L_m \underline{I}_m + j\omega M \underline{I}_k \tag{7.87}$$

Kada se svi strujni generatori mreže transformišu u naponske generatore, prema opisanoj proceduri, vektor elektromotornih sila petlji $\underline{\mathbf{E}}_p$ odredjuje se prema pravilu izvedenom u prethodnoj sekciji.

Jednačine petlji za mreže koje sadrže zavisne generatore

Uticaj zavisnih generatora na jednačine petlji ilustrovaćemo na primjeru mreže koja je prikazana na slici 7.16, koja sadrži zavisni strujni izvor u grani 5.

Figure 7.16: Ilustracija izvodjenja jednačina petlji za mrežu koja sadrži zavisne generatore

Prema postupku, koji smo izveli za LVN kola za metod napona čvorova, zavisne generatore privremeno posmatramo kao nezavisne. Tada jednačine grana imaju oblik:

$$\underline{\mathbf{V}} = \underline{\mathbf{Z}}\,\underline{\mathbf{I}} - \underline{\mathbf{Z}}\,\underline{\mathbf{I}}_g + \underline{\mathbf{V}}_g$$

ili napisano u skalarnom obliku za mrežu sa slike 7.16:

$$\begin{bmatrix} \underline{V}_1 \\ \underline{V}_2 \\ \underline{V}_3 \\ \underline{V}_4 \\ \underline{V}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2j\omega} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3j\omega & j\omega & -j\omega \\ 0 & 0 & j\omega & 4j\omega & 2j\omega \\ 0 & 0 & -j\omega & 2j\omega & 5j\omega \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_3 \\ \underline{I}_4 \\ \underline{I}_5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4\underline{V}_2 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} \underline{V}_{g1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.88)$$

Da bismo uticaj naponski upravljivog strujnog izvora izrazili preko matrice impedansi grana $\underline{\mathbf{Z}}$ potrebno je da napon $\underline{V}_2$ izrazimo preko struja grana (struje $\underline{I}_2$). Iz jednačine stanja grane 2 slijedi:

$$\underline{V}_2 = \frac{1}{2j\omega}\underline{I}_2$$

odnosno:

$$4\underline{V}_2 = \frac{2}{j\omega}\underline{I}_2$$

Dalje je potrebno uticaj strujnog generatora $\frac{2}{j\omega}\underline{I}_2$ prikazati modifikovanjem elemenata matrice $\underline{\mathbf{Z}}$. Jednačine stanja grana 3, 4 i 5 možemo transformisati na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
\underline{V}_3 &= 3j\omega\underline{I}_3 + j\omega\underline{I}_4 - j\omega(\underline{I}_5 - \frac{2}{j\omega}\underline{I}_2) = 2\underline{I}_2 + 3j\omega\underline{I}_3 + j\omega\underline{I}_4 - j\omega\underline{I}_5 \\
\underline{V}_4 &= j\omega\underline{I}_3 + 4j\omega\underline{I}_4 + 2j\omega(\underline{I}_5 - \frac{2}{j\omega}\underline{I}_2) = -4\underline{I}_2 + j\omega\underline{I}_3 + 4j\omega\underline{I}_4 + 2j\omega\underline{I}_5 \\
\underline{V}_5 &= -j\omega\underline{I}_3 + 2j\omega\underline{I}_4 + 5j\omega(\underline{I}_5 - \frac{2}{j\omega}\underline{I}_2) = -10\underline{I}_2 - j\omega\underline{I}_3 + 2j\omega\underline{I}_4 + 5j\omega\underline{I}_5
\end{aligned}$$

Tada jednačine stanja grana imaju oblik:

$$\begin{bmatrix} \underline{V}_1 \\ \underline{V}_2 \\ \underline{V}_3 \\ \underline{V}_4 \\ \underline{V}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2j\omega} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3j\omega & j\omega & -j\omega \\ 0 & -4 & j\omega & 4j\omega & 2j\omega \\ 0 & -10 & -j\omega & 2j\omega & 5j\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_3 \\ \underline{I}_4 \\ \underline{I}_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{V}_{g1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7.89}$$

Za ovaj primjer matrica impedansi petlji $\underline{\mathbf{Z}}_p$ ima oblik:

$$\underline{\mathbf{Z}}_p = \mathbf{A}\underline{\mathbf{Z}}\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 5 + 3j\omega + 2\frac{2}{j\omega} & -3j\omega \\ -16 - 3j\omega & 16j\omega \end{bmatrix} \tag{7.90}$$

Uočavamo da matrica impedansi petlji za ovaj slučaj nema simetričnu strukturu. Takodje možemo konstatovati da se matrica impedansi petlji $\underline{\mathbf{Z}}_p$ *ne može direktno napisati inspekcijom mreže.*

Chapter 8

Teoreme električnih mreža

U ovom poglavlju definisane su i dokazane sljedeće teoreme električnih mreža:

- Telegenova teorema
- Teorema substitucije
- Teorema superpozicije
- Teorema reciprociteta
- Tevenenova–Nortonova teorema

8.1 Telegenova teorema

Telegenova teorema se izvodi iz Kirhofovih zakona i vrijedi za sve klase mreža. Teorema definiše osobinu električnih mreža sa koncentrisanim parametrima da je ukupna snaga koja se predaje granama mreže u svakom trenutku t jednaka nuli.

Za usaglašene referentne smjerove napona i struje grane k trenutna snaga $p_k(t)$ koja se predaje grani odredjena je izrazom:

$$p_k(t) = v_k(t) i_k(t), \quad \text{za } k = 1, 2, \ldots, N_l$$

Tada Telegenovu teoremu možemo izraziti relacijom:

$$\sum_{k=1}^{N_l} p_k(t) = \sum_{k=1}^{N_l} v_k(t) i_k(t) \tag{8.1}$$

Dokaz Telegenove teoreme izvesti ćemo za mrežu M, koja sadrži N_l grana i N_n čvorova. Pretpostavimo da mreža ima povezani graf i da ne sadrži paralelne grane. Na slici 8.1 prikazana je proizvoljna grana k orijentisanog grafa G, koja povezuje čvorove l i m.

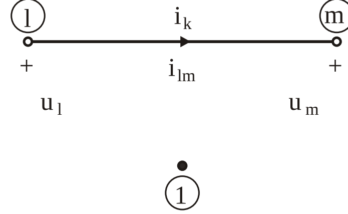


Figure 8.1: Opšta grana grafa G za referentni čvor 1

Za mrežu M vrijede Kirhofovi zakoni. Za struju i_k uvedimo sljedeće oznake:

$$i_k = i_{lm} = -i_{ml}$$

Ako za referentni čvor izaberemo čvor 1, napone grana v_k $(k = 1, 2, \ldots, N_l)$ možemo izraziti prema KZN preko napona čvorova u_i $(i = 1, 2, .., l, .., m, ..n)$. Snaga grane k tada se može izraziti relacijom:

$$v_k i_k = (u_l - u_m) i_{lm} = (u_m - u_l) i_{ml} \tag{8.2}$$

Izraz 8.2 može se napisati u obliku:

$$v_k i_k = \frac{1}{2} \left[(u_l - u_m) i_{lm} + (u_m - u_l) i_{ml} \right] \tag{8.3}$$

Sumirajući relacije 8.3 za sve grane $k = 1, 2, \ldots, N_l$, dobijamo:

$$\sum_{k=1}^{N_l} v_k i_k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} (u_l - u_m) i_{lm} \tag{8.4}$$

Dvostruka suma označava da u opštem slučaju l i m poprimaju sve vrijednosti od 1 do N_n. Ukoliko čvorovi l i m nisu susjedni čvorovi tada vrijedi $i_{lm} = 0$.

Desnu stranu relacije 8.4 možemo preurediti na sljedeći način:

$$\frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n} u_l \left(\sum_{m=1}^{n} i_{lm} \right) - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n} u_m \left(\sum_{l=1}^{n} i_{lm} \right) \tag{8.5}$$

Za svaki čvor l, suma $\sum_{m=1}^{n} i_{lm}$ predstavlja sumu struja i_{lm} koje izlaze iz čvora l. Za svaki čvor m, suma $\sum_{l=1}^{n} i_{lm}$ predstavlja sumu struja i_{lm} koje ulaze u čvor m. Prema KZS obje sume su jednake nuli. Odatle slijedi da je i ukupna snaga koja se predaje granama mreže jednaka nuli za svaki trenutak vremena t. Prema tome, na osnovu Kirhofovih zakona dokazali smo Telegenovu teoremu.

Telegenova teorema vrijedi za proizvoljno izabrane napone i struje grana koji odgovaraju analiziranom grafu G, pod uslovom da za njih vrijede Kirhofovi zakoni.

Tako za skup varijabli $\hat{v}$ i $\hat{i}$ mreže M takodje vrijedi:

$$\sum_{k=1}^{N_l} \hat{v}_k \hat{i}_k = 0 \tag{8.6}$$

Pošto Telegenova teorema zavisi isključivo od grafa mreže, takodje vrijedi i za kombinacije napona i struja mreža, koje imaju identičan graf. Tako vrijedi:

$$\sum_{k=1}^{N_l} \hat{v}_k i_k = 0$$

odnosno:

$$\sum_{k=1}^{N_l} v_k \hat{i}_k = 0$$

8.1.1 Zakon o održanju energije

Prema Telegenovoj teoremi suma snaga koje se u svakom trenutku t predaju granama opšte mreže M jednaka je nuli. Odavde se izvodi zakon o *održanju energije* u električnim mrežama.

Ukoliko grana koje sadrže nezavisne izvore posmatramo zasebno, tada zakon o održanju (konzervaciji) energije možemo definisati na sljedeći način:

- *Suma snaga koje nezavisni generatori predaju mreži jednaka je sumi snaga koje grane, koje ne sadrže nezavisne izvore, primaju u svakom trenutku t nezavisno od njihovog karaktera.*

Zakon o odražanju energije ne zavisi od karakteru nezavisnih generatora i obliku njihovih signala. Odavde slijedi da Kirhofovi zakoni definišu raspodjelu snaga (energija) koje se predaju granama kola u svakom trenutku vremena t. Za LVN otpornike predata energija se disipacijom pretvara u neki drugi oblik energije, odnosno prenosi se izvan mreže. Brzina procesa disipacije odredjena je snagom otpornika $R_k i_k^2(t)$. Za LVN zavojnice predata energija se pretvara u akumuliranu elektromagnetnu energiju $\frac{1}{2} L_k i_k^2(t)$, a za LVN kondenzatore u akumuliranu elektrostatičku energiju $\frac{1}{2} C_k v_k^2(t)$. *Na osnovu zakona o održanju energije zaključujemo da električne mreže sa koncentrisanim parametrima imaju karakteristike zatvorenih sistema.*

8.1.2 Primjena Telegenove teoreme za identične mreže

Za mreže M i $\hat{M}$ kažemo da su *identične* ukoliko imaju identičan graf $G = \hat{G}$. Ukoliko za obje mreže izaberemo iste smjerove grana tada su njihovi orijentisani grafovi takodje identični, odnosno njihove varijable stanja, naponi v_k i struje i_k grana mreže M i naponi $\hat{v}_k$ i struje $\hat{i}_k$ mreže M_1, zadovoljavaju iste KZS i KZN.

Tada prema Telegenova teoremi vrijedi::

$$\sum_{k=1}^{N_l} v_k i_k = \sum_{k=1}^{N_l} \hat{v}_k \hat{i}_k = 0$$

Ove relacije izražavaju zakon o održanju energije u respektivnim mrežama.

Pošto naponi v_k i $\hat{v}_k$ i struje i_k i $\hat{i}_k$ zadovoljavaju identična ograničenja prema Kirhofovim zakonima, takodje vrijedi:

$$\sum_{k=1}^{N_l} v_k \hat{i}_k = \sum_{k=1}^{N_l} v_k \hat{i}_k = 0$$

Prethodne relacije, koje sadrže napone i struje grana različitih mreža, nemaju nikakvo fizikalno značenje.

8.1.3 Primjena Tevenenove teorema za stacionarni odziv

Kada se primijeni za stacionarni odziv mreže Tevenenova teorema je izražena relacijom:

$$\sum_{k=1}^{N_l} \frac{1}{2} \underline{V}_k \underline{I}_k^* = 0 \tag{8.7}$$

Pri tome fazori napona grana $\underline{V}_k$ zadovoljavaju KZN, a konjugovane vrijednosti fazora struja grana $\underline{I}_k^*$ zadovoljavaju KZS. Pretpostavimo da mreža sadrži samo jedan nezavisni naponski generator $\underline{V}_g$, koji je lociran u grani 1 ($\underline{V}_1 = \underline{V}_g$) kao što je prikazano na slici 8.2.

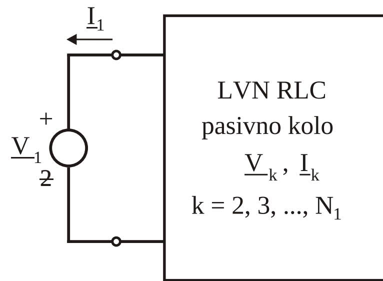


Figure 8.2: Ilustracija primjene Telegenove teoreme za stacionarno stanje pasivne RLC mreže sa jednim generatorom

Tada relaciju 8.7 možemo pisati u obliku:

$$-\frac{1}{2}\underline{V}_1\underline{I}_1^* = \sum_{k=2}^{N_l}\frac{1}{2}\underline{V}_k\underline{I}_k^* \tag{8.8}$$

Snaga $-\frac{1}{2}\underline{V}_1\underline{I}_1^*$ jednaka je kompleksnoj snazi koja se predaje grani 1 odnosno kompleksnoj snazi $\frac{1}{2}\underline{V}_1\underline{I}_1^*$, koju nezavisni naponski generator predaje mreži. Prema tome *Telegenova teorema definiše zakon o održanju kompleksne snage u stacionarnom stanju RLC mreža pri djelovanje generatora sinusnog oblika pobudnog signala.* Izvedeni zakon vrijedi i za slučaj da mreža sadrži dva ili više generatora, kao što je prikazano na slici 8.3.

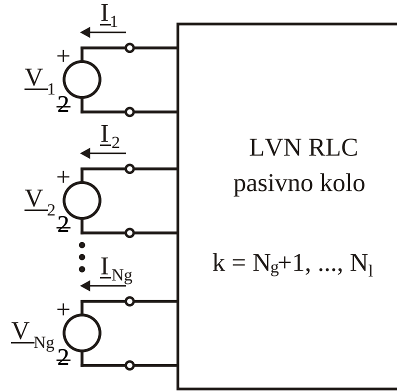


Figure 8.3: Ilustracija primjene Telegenove teoreme za stacionarno stanje RLC mreže sa više generatora

Za mrežu prikazanu na slici 8.3 zakon o održanju kompleksne snage izražen je relacijom:

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N_g}\underline{V}_k\underline{I}_k^* = \sum_{k=N_g+1}^{N_l}\frac{1}{2}\underline{V}_k\underline{I}_k^* \tag{8.9}$$

U prethodnim primjerima korišteni su naponski generatori. Do identičnih rezultata se dolazi i kada se koriste strujni generatori. Dakle za mreže koje sadrže više (naponskih i strujnih) generatora sinusnog oblika pobudnog signala, zakon o održanju kompleksne snage u stacionarnom stanju glasi:

Suma kompleksnih snaga koje generatori predaju mreži jednaka je sumi kompleksnih snaga koje se predaju granama koje ne sadrže generatore.

Pošto vrijedi za kompleksne snage Telegenova teorema definiše i princip o održanju aktivnih i reaktivnih snaga u stacinarnom stanju RLC kola pri sinusnoj pobudi.

8.2 Teorema substitucije

Prema teoremi substitucije grana opšte mreže k može se zamijeniti odgovarajućim nezavisnim strujnim $i_g = i_k$ ili naponskim $v_g = v_k$ generatorom tako da naponi i struje preostalih grana ostanu nepromijenjeni.

Dokaz teoreme izvodimo na osnovu Kirhofovih zakona prema sljedećem postupku:

- Grana k mreže m zamijeni se sa naponskim generatorom, čija vrijednost je jednaka naponu grane $v_g = v_k$ ili strujnim generatorom, čija vrijednost je jednaka struji grane $i_g = i_k$.
- Pošto je opisanom transformacijom topologija mreže ostala neizmijenjena naponi $\hat{v}_k$ i struje $\hat{i}_k$ grana transformisane mreže $\hat{M}$ prema Kirhofovim zakonima zadovoljavaju ista ograničenja kao i varijable stanja v_k i i_k mreže M.
- Kako zadovoljavaju ista ograničenja naponi v_k i $\hat{v}_k$ i struje i_k i $\hat{i}_k$ predstavljaju identične jedinstvene varijable stanja.

Primjena teoreme substitucije za stacionarni odziv RLC mreže

Na slici 8.4 ilustrovana je primjena metoda substitucije za LVN RLC mrežu u stacionarnom stanju pri sinusnoj pobudi.

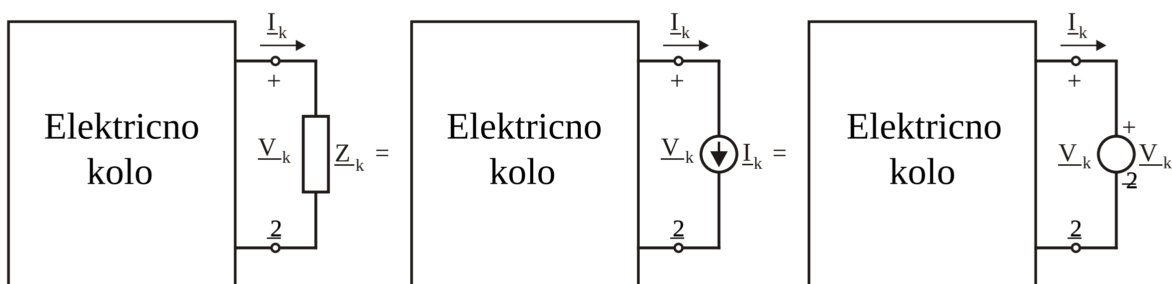


Figure 8.4: Ilustracija primjene teoreme substitucije za stacionarno stanje RLC mreže

Teorema substitucije za stacionarno stanje RLC mreža odnosi se na fazore napona $\underline{V}_k$ i struja $\underline{I}_k$. Prema teoremi substitucije pasivne RLC mreže, prikazane

na slici 8.5, su ekvivalentne. Transformacija mreže sa slike 8.5.a je izvršena tako što je grana k, koja sadrži naponski generator $\underline{V}_g$, zamijenjena sa strujnim generatorom čija je vrijednost jednaka struji $\underline{I}_k = \underline{V}_g \underline{Y}_u == \underline{V}_g\, \underline{Z}_u^{-1}$ u polaznoj mreži.

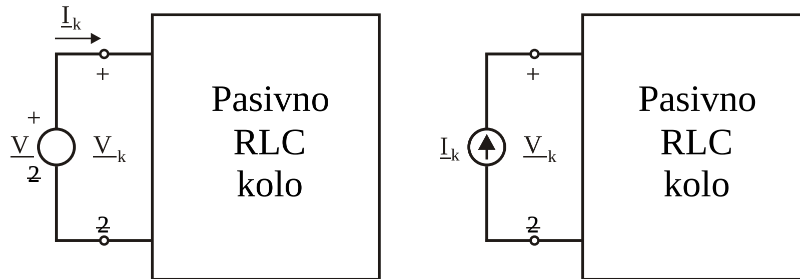


Figure 8.5: Ilustracija primjene teoreme substitucije za RLC mreže sa jednim generatorom

8.3 Teorema superpozicije

Teorema suprepozicije vrijedi samo za linearne mreže. Prema teoremi superpozicije odziv linearnih mreža (struja i_k ili napon v_k) jednak je zbiru odziva (v_{kj}, i_{kj}) koji nastaju uslijed pojedinačnog djelovanja generatora $j = 1, 2, ..., N_g$. Struja i_{kj} i napon v_{kj} predstavljaju odzive kola pri djelovanju generatora j, kada su svi drugi izvori eliminisani iz mreže (naponski izvori su kratko-spojeni a strujni otpojeni).

Teorema superpozicije je izvedena iz osobine linearnosti LVN kola koja podrazumjeva:

- linearnost jednačina prema KZS
- linearnost jednačina prema KZN
- linearnost karakteristika grana $f(v, i) = 0$.

Dokaz teoreme superpozicije izvesti ćemo na primjeru stacionarnog stanja RLC mreža pri sinusnim pobudama. Pri tome teorema superpozicije vrijedi za fazore varijabli stanja. Pošto su nezavisni generatori nelinearni elementi, grane koje sadrže ove generatore posmatraju se zasebno. U cilju pojednostavljenja dokaza pretpostavimo da mreža M sadrži po jedan naponski $\underline{V}_g$ i strujni $\underline{I}_g$ generator, kao što je prikazano na slici 8.6.

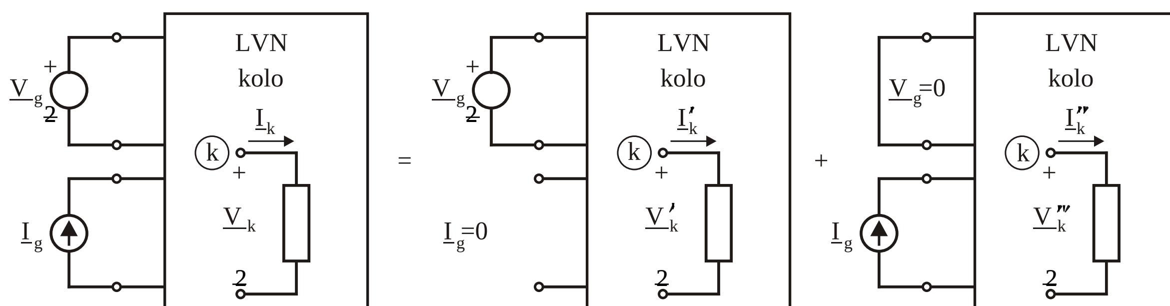


Figure 8.6: Ilustracija principa superpozicije za stacionarno stanje linearne mreže

Na slici 8.6 uvedene su sljedeće oznake:

- $\underline{V}_k$ i $\underline{I}_k$ - za varijable kada su uključena oba generatora,
- $\underline{V}'_k$ i $\underline{I}'_k$ - za varijable kada je uključen samo naponski generator,
- $\underline{V}''_k$ i $\underline{I}''_k$ - za varijable kada je uključen samo strujni generator.

Da bismo dokazali teoremu superpozicije treba da dokažemo da vrijede relacije:

$$\begin{aligned} \underline{V}_k &= \underline{V}'_k + \underline{V}''_k \\ \underline{I}_k &= \underline{I}'_k + \underline{I}''_k \end{aligned} \tag{8.10}$$

Pošto proces eliminisanja generatora ne mijenja graf mreže, za sve tri mreže prikazane na slici 8.6 važe identična ograničenja prema Kirhofovim zakonima. Tada se dokaz teoreme superpozicije svodi na dokazivanje sljedećih tvrdnji:

- naponi $\underline{V}'_k + \underline{V}''_k$ zadovoljavaju iste KZN kao i naponi $\underline{V}_k$,
- struje $\underline{I}'_k + \underline{I}''_k$ zadovoljavaju iste KZS kao i struje $\underline{I}_k$,
- jednačine stanja grana su zadovoljene za napone $\underline{V}'_k + \underline{V}''_k$ i struje $\underline{I}'_k + \underline{I}''_k$.

Jednačine prema KZN za konture i koje ne sadrže naponske generatore imaju oblik:

$$\sum_{i=1}^{N_p} b_{ik}\underline{V}'_k = 0$$

$$\sum_{i=1}^{N_p} b_{ik}\underline{V}_k^{"} \quad = \quad 0 \tag{8.11}$$

gdje su b_{ik} elementi matrice **B**. Tada vrijedi:

$$\sum_{i=1}^{N_p} b_{ik}(\underline{V}_k' + \underline{V}_k^{"}) = 0 \tag{8.12}$$

odnosno naponi $\underline{V}_k' + \underline{V}_k^{"}$ zadovoljavaju identične KZN kao i naponi $\underline{V}_k$.

Za konture koje sadrže naponski generator vrijedi:

$$\sum_{i=1}^{N_p} b_{ik}\underline{V}_k' = \pm\underline{V}_g \tag{8.13}$$

odnosno:

$$\sum_{i=1}^{N_p} b_{ik}(\underline{V}_k' + \underline{V}_k^{"}) = \pm\underline{V}_g \tag{8.14}$$

Dakle i za konture koje sadrže naponski generator vrijedi da naponi $\underline{V}_k' + \underline{V}_k^{"}$ zadovoljavaju iste KZN kao i naponi $\underline{V}_k$. Time smo dokazali uslov 1. postupka dokazivanja teoreme superpozicije.

Analogno možemo pokazati da za čvorove i koji nisu povezani sa strujnim generatorom vrijedi:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\underline{I}_k' &= 0 \\ \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\underline{I}_k^{"} &= 0 \end{aligned} \tag{8.15}$$

gdje su a_{ik} elementi matrice **A**. Za čvorove i koji su povezani sa strujnim generatorom vrijedi:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\underline{I}_k^{"} = \pm\underline{I}_g \tag{8.16}$$

odnosno:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik}(\underline{I}_k' + \underline{I}_k^{"}) = \pm\underline{I}_g \tag{8.17}$$

Dakle i za čvorove koji su povezani sa strujnim generatorom vrijedi da struje $\underline{I}_k' + \underline{I}_k^{"}$ zadovoljavaju iste KZS kao i struje $\underline{I}_k$. Time smo dokazali uslov 2. postupka dokazivanja teoreme superpozicije.

Zbog linearnosti jednačina stanja grana mreže, koje ne sadrže generatore, i koje su izražene relacijom:

$$\underline{\mathbf{V}} = \underline{\mathbf{Z}}\,\underline{\mathbf{I}}$$

vrijedi:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{V}}' &= \underline{\mathbf{Z}}\,\underline{\mathbf{I}}' \\ \underline{\mathbf{V}}" &= \underline{\mathbf{Z}}\,\underline{\mathbf{I}}" \end{aligned}$$

odakle slijedi:

$$\underline{\mathbf{V}}' + \underline{\mathbf{V}}" = \underline{\mathbf{Z}}(\underline{\mathbf{I}}' + \underline{\mathbf{I}}") \tag{8.18}$$

Time smo dokazali i uslov 3. dokaza teoreme superpozicije.

8.4 Teorema reciprociteta

Teorema reciprociteta često se susreće u fizici. Prema teoremi reciprociteta kada se na izlaz sistema dovede ulazni pobudni signal $x(t)$ na ulazu se kao odziv sistema javlja izlazni signal $y(t)$. Dakle *odziv sistema ostaje nepromijenjen kada ulazni i izlazni signal zamijene mjesta.* Teorema reciprociteta vrijedi samo za mreže koje ne sadrže izvore. Dokaz teoreme reciprociteta izvodi se pomoću Telegenove teoreme.

Teorema reciprociteta za stacionarni odziv

Teoremu reciprociteta ilustrovati ćemo na primjeru stacionarnog odziva linearne pasivne RLC mreže, za slučajeve priključenja naponskog i strujnog generatora. Na slici 8.7 prikazani su krajevi pristupa $1-1'$ i $2-2'$ preko kojih se priključuje naponski generator.

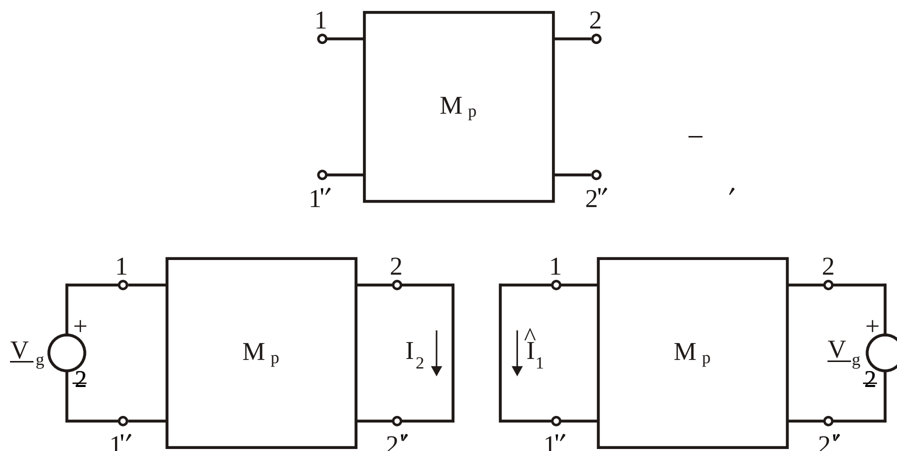


Figure 8.7: Ilustracija teoreme reciprociteta pri priključenju naponskog generatora

Struja $\underline{I}_2$ protiče kroz kratkospojene krajeve $2-2'$ kada je na pristup $1-1'$ priključen naponski generator $\underline{V}_g$. Struja $\hat{\underline{I}}_1$ protiče kroz kratkospojene krajeve $1-1'$ kada je na pristup $2-2'$ priključen naponski generator $\underline{V}_g$. Smjerovi napona

generatora $\underline{V}_g$ i struja $\underline{I}_2$ i $\hat{\underline{I}}_1$ su usaglašeni. Prema teoremi reciprociteta slijedi da su struje $\underline{I}_2$ i $\hat{\underline{I}}_1$ jednake.

Analogno vrijedi i za slučaj priključenja strujnog generatora $\underline{I}_g$. Na slici 8.8 ilustrovana je primjena teoreme reciprociteta za slučaj priključenja strujnog generatora.

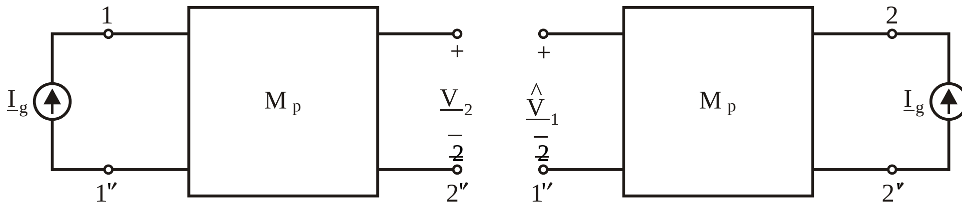


Figure 8.8: Ilustracija teoreme reciprociteta pri priključenju strujnog generatora

Napon $\underline{V}_2$ je napon na otvorenim krajevima $2-2'$ kada je na pristup $1-1'$ priključen strujni generator $\underline{I}_g$. Napon $\hat{\underline{V}}_1$ predstavlja napon na otvorenim krajevima $1-1'$ kada je na pristup $2-2'$ priključen strujni generator $\underline{I}_g$. Smjerovi struje generatora $\underline{I}_g$ i napona $\underline{V}_2$ i $\hat{\underline{V}}_1$ su usaglašeni. Prema teoremi reciprociteta slijedi da su naponi $\underline{V}_2$ i $\hat{\underline{V}}_1$ jednaki.

Svaka pasivna mreža koja zadovoljava opisane zakonitosti pripada klasi recipročnih mreža. Ukoliko prikazane mreže posmatramo kao četveropole, posljedica teoreme reciprociteta može se izraziti relacijama:

$$z_{12} = \frac{\hat{\underline{V}}_1}{\underline{I}_g} = z_{21} = \frac{\underline{V}_2}{\underline{I}_g} \tag{8.19}$$

odnosno:

$$y_{12} = \frac{\hat{\underline{I}}_1}{\underline{V}_g} = y_{21} = \frac{\underline{I}_2}{\underline{V}_g} \tag{8.20}$$

Dakle prenosni Z i Y parametri recipročnih četveropola su jednaki. Prema teoremi reciprociteta takodje vrijedi da su u kolima prikazanim na slici 8.9 oblici izlaznih signala (odziva kola) $\underline{I}_2$ i $\underline{\hat{V}_1}$ identični ukoliko su identični ulaznih signala (pobuda kola) $\underline{I}_g$ i $\underline{V}_g$.

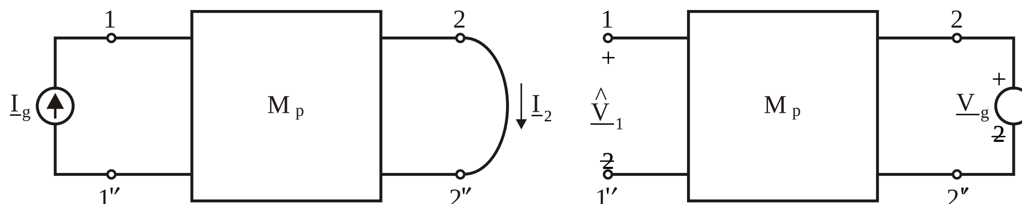


Figure 8.9: Ilustracija posljedice teoreme reciprociteta

8.4.1 Tevenenova-Nortonova teorema za stacionarni odziv

U poglavlju 2 u knjizi 1 izvena je Tevenenova-Nortonova teorema za kola koja sadrže identične RLC elemente. U ovom poglavlju proširićemo postavku i izvesti dokaz teoreme za stacionarni odziv linearnih mreža. Na slici 8.10 prikazana je linearna mreža M koja je preko krajeva $a-b$ povezana sa impedansom $\underline{Z}$.

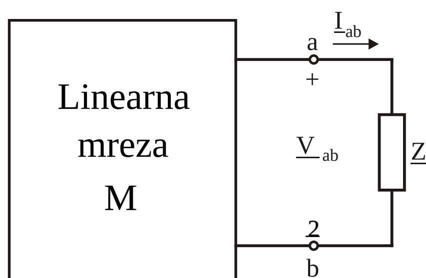


Figure 8.10: Ilustracija dokaza Tevenenove-Nortonove teoreme.

Mreža M može da sadrži nezavisne i linearne zavisne izvore. Karakter impedanse $\underline{Z}$ je proizvoljan, ali nije dozvoljeno da postoji sprega izmedju impedanse i nekog elementa mreže M. Odgovarajuća (Tevenenovo i Nortonovo) ekvivalentna kola prikazana su na slici 8.11.

Relaksirana linearna mreža M_0 formira se tako da se iz mreže M eliminišu svi nezavisni izvori. Ukoliko mreža M ne sadrži zavisne izvore, nego samo RLC elemente, tada se relaksirana mreža M_0 može predstaviti u odnosu na krajeve a–b preko ulazne impedanse $\underline{Z}_u$ (odnosno ulazne admitanse $\underline{Y}_u$). Tada je vrijednost

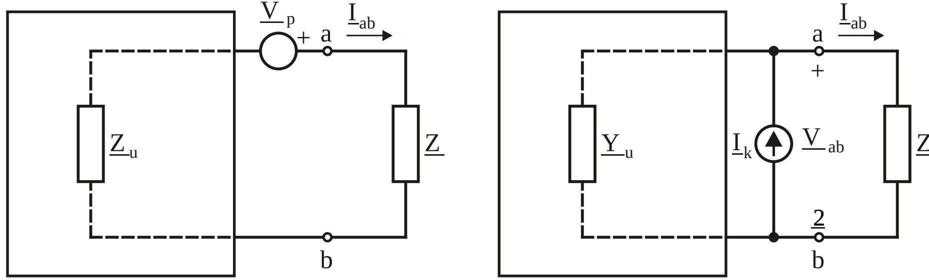


Figure 8.11: a. Tevenenovo ekvivalentno kolo mreže M sa slike 10. b. Nortonovo ekvivalentno kolo mreže M sa slike 10.

impedanse (admitanse) ekvivalentnih generatora:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{Te} &= \underline{Z}_u \\ \underline{Y}_{Ne} &= \underline{Y}_u \end{aligned} \tag{8.21}$$

Vrijednost napona ekvivalentnog naponskog generatora $\underline{V}_0$ jednaka je naponu $\underline{V}_{ab}$ pri otvorenim krajevima $a-b$, a vrijednost struje ekvivalentnog strujnog generatora $\underline{I}_k$ jednaka je struji $\underline{I}_{ab}$ pri kratko-spojenim krajevima $a-b$. Pošto vrijedi $\underline{Z}_u$=$\underline{Y}_u^{-1}$ slijedi:

$$\underline{Z}_{Te} = \underline{Y}_{Ne}^{-1} \tag{8.22}$$

odnosno jednostavno se dokazuje da za kola sa slike 8.11 vrijedi:

$$\begin{aligned} \underline{V}_0 &= \underline{I}_k \underline{Z}_e \\ \underline{I}_k &= \underline{V}_0 \underline{Y}_e \end{aligned} \tag{8.23}$$

Pošto su Tevenenovo i Nortonovo ekvivalentno kolo dualna kola, dovoljno je da dokažemo Tevenenovu teoremu, a dokaz Nortonove teoreme slijedi prema analogiji dualnih kola.

Prema Tevenenovoj teoremi za mrežu M vrijedi:

$$\underline{I}_{ab} = \frac{\underline{V}_{Te}}{\underline{Z}_{Te} + \underline{Z}} \tag{8.24}$$

Dokaz Tevenenove teoreme zasniva se na teoremama o substituciji i superpoziciji. Prema teoremi o substituciji kolo sa slike 8.10 možemo prikazati pomoću kola prikazanog na slici 8.12.a u kome je grana sa impedansom $\underline{Z}$ zamjenjena strujnim generatorom $\underline{I}_{ab}$.

Nadalje na osnovu teoreme superpozicije kolo sa slike 8.12.a možemo predstaviti kao "sumu" kola prikazanih na slikama 8.12.b i 8.12.c. U kolu na slici 12.b relaksirana mreža M_0 priključena je na strujni generator $\underline{I}_{ab}$. Kada relaksiranu

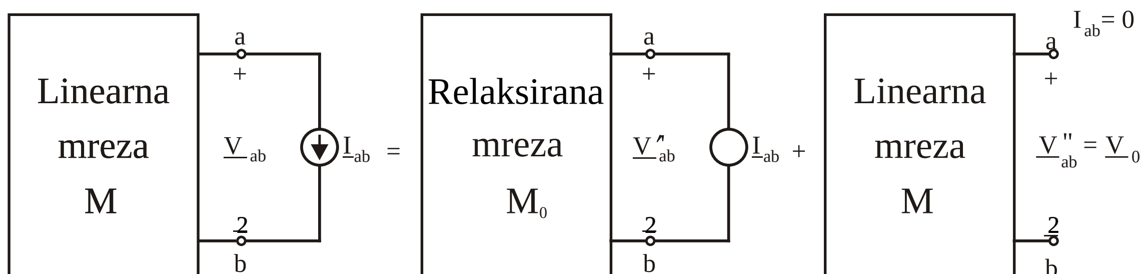


Figure 8.12: Ilustracija dokaza Tevenenove teoreme

mrežu predstavimo pomoću ulazne impedanse $\underline{Z}_u$ za napon na krajevima $a-b$ u ovom kolu vrijedi:

$$\underline{V}'_{ab} = -\underline{Z}_u \underline{I}_{ab} \tag{8.25}$$

Za mrežu prikazanu na slici 8.12.c, koja se dobija eliminacijom strujnog generatora $\underline{I}_{ab}$ vrijedi:

$$\underline{V}"_{ab} = \underline{V}_0 \tag{8.26}$$

gdje je $\underline{V}_0$ napon mreže M na krajevima $a-b$ u praznom hodu (pri $\underline{I}_{ab}=0$).

Odavde prema teoremi superpozicije vrijedi:

$$\underline{V}_{ab} = \underline{V}'_{ab} + \underline{V}"_{ab} = -\underline{Z}_u \underline{I}_{ab} + \underline{V}_0 \tag{8.27}$$

Identična jednačina se dobija za napon $\underline{V}_{ab}$ u ekvivalentnom Tevenenovom kolu:

$$\underline{V}_{ab} = -\underline{Z}_{Te} \underline{I}_{ab} + \underline{V}_{Te} \tag{8.28}$$

Pošto vrijedi $\underline{Z}_{Te}=\underline{Z}_u$ izrazi 8.27 i 8.28 su identični. Odatle slijedi:

$$\underline{I}_{ab} = \frac{\underline{V}_{Te}}{\underline{Z}_{Te} + \underline{Z}}$$

čime smo dokazali Tevenenovu teoremu. Prema analogiji dualnih mreža dokaz Nortonove teoreme se izvodi tako da se grana a–b zamijeni naponskim generatorom $\underline{V}_{ab}$.

Primjena Tevenenove teoreme

Tevenenova teorema se koristi ukoliko se zahtijeva izračunavanje varijabli stanja samo jedne grane. Primjena teoreme zahtijeva odredjivanje napona praznog hoda $\underline{V}_0$ (ili struje kratkog spoja $\underline{I}_k$) i ulazne impedanse $\underline{Z}_u$ za izabranu granu. Napon praznog hoda i struja kratkog spoja su ili poznati ili se odredjuju rješavanjem odziva mreže za odgovarajuće režime. Impedansa $\underline{Z}_u$ mreže M_0 može se odrediti na dva načina:

- Za mreže koje ne sadrže zavisne izvore ulazna impedansa ima fizičko značenje i izračunava se kao ulazna impedansa $\underline{Z}_{a-b}$, transformacijom rednih i paralelnih veza impedansi grana $\underline{Z}_k$ u odnosu na krajeve a–b relaksirane mreže M_0. Ovaj postupak se primjenjuje za mreže koje imaju jednostavniju strukturu.

- Za mreže koje imaju složeniju strukturu ili za mreže koje sadrže zavisne izvore impedansa $\underline{Z}_{ab}$ se odredjuje iz matrice impedansi čvorova $\underline{\mathbf{Z}}_n$.

Drugi postupak polazi od jednačine čvorova:

$$\begin{bmatrix} \underline{V}_{n1} \\ \underline{V}_{n2} \\ \vdots \\ \underline{V}_{nk} \\ \vdots \\ \underline{V}_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1k} & \dots & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & \dots & z_{2k} & \dots & z_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ z_{k1} & z_{k2} & \dots & z_{kk} & \dots & z_{kn} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ z_{n1} & z_{n2} & \dots & z_{nk} & \dots & z_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_{n1} \\ \underline{I}_{n2} \\ \vdots \\ \underline{I}_{nk} \\ \vdots \\ \underline{I}_{nn} \end{bmatrix} \tag{8.29}$$

Postoje dvije mogućnosti položaja čvorova a i b u mreži M_0:

- jedan od čvorova je referentni čvor (npr. čvor b),

- niti jedan od čvorova nije referentni čvor.

Za prvi slučaj pretpostavimo da je čvor a numerisan kao čvor k. Tada jednačina 8.29 napisana za mrežu M_0, koja je priključena na strujni izvor $\underline{I}_{ab}$, ima oblik:

$$\begin{bmatrix} \underline{V}_{n1} \\ \underline{V}_{n2} \\ \vdots \\ \underline{V}_{nk} \\ \vdots \\ \underline{V}_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1k} & \dots & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & \dots & z_{2k} & \dots & z_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ z_{k1} & z_{k2} & \dots & z_{kk} & \dots & z_{kn} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ z_{n1} & z_{n2} & \dots & z_{nk} & \dots & z_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -\underline{I}_{ab} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{8.30}$$

Iz prethodne jednačine slijedi:

$$\underline{V}_{nk} = \underline{Z}_{kk}\underline{I}_{nk} = \underline{Z}_{kk}(-\underline{I}_{ab}) \tag{8.31}$$

ili uvažavajući relaciju 8.25:

$$\underline{V}_{nk} = \underline{Z}_u(-\underline{I}_{ab})$$

Odavde slijedi:

$$\underline{Z}_u = \underline{Z}_{kk}$$

odnosno *za ovaj slučaj ulazna impedansa* $\underline{Z}_u$ *jednaka je dijagonalnom članu* $\underline{Z}_{kk}$ *matrice impedansi čvorova.*

Za slučaj da niti jedan od čvorova nije referentni, strujni izvor $\underline{I}_{ab}$ je priključen izmedju čvorova a i b. Pretpostavimo da je numeracija ovih čvorova i i k respektivno. Tada jednačina čvorova ima oblik:

$$\begin{bmatrix} \underline{V}_{n1} \\ : \\ \underline{V}_{ni} \\ : \\ \underline{V}_{nk} \\ : \\ \underline{V}_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & ... & z_{1k} & ... & z_{1i} & ... & z_{1n} \\ : & : & ... & : & ... & : & ... & : \\ z_{i1} & z_{i2} & ... & z_{ik} & ... & z_{ii} & ... & z_{in} \\ : & : & ... & : & ... & : & ... & : \\ z_{k1} & z_{k2} & ... & z_{kk} & ... & z_{ki} & ... & z_{kn} \\ : & : & ... & : & ... & : & ... & : \\ z_{n1} & z_{n2} & ... & z_{nk} & ... & z_{ni} & ... & z_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ : \\ -\underline{I}_{ab} \\ : \\ \underline{I}_{ab} \\ : \\ 0 \end{bmatrix} \tag{8.32}$$

Iz prethodne relacije slijedi:

$$\begin{aligned} \underline{V}_{ni} &= \underline{Z}_{ii}(-\underline{I}_{ab}) + \underline{Z}_{ik}\underline{I}_{ab} = (\underline{Z}_{ii} - \underline{Z}_{ik})(-\underline{I}_{ab}) \\ \underline{V}_{nk} &= \underline{Z}_{ki}(-\underline{I}_{ab}) + \underline{Z}_{kk}\underline{I}_{ab} = (-\underline{Z}_{kk} + \underline{Z}_{ki})(-\underline{I}_{ab}) \end{aligned} \tag{8.33}$$

Tada vrijedi:

$$\underline{V}_{ab} = \underline{V}_{ni} - \underline{V}_{nk} = (\underline{Z}_{ii} + \underline{Z}_{kk} - \underline{Z}_{ik} - \underline{Z}_{ki})(-\underline{I}_{ab}) \tag{8.34}$$

Odakle slijedi:

$$\underline{Z}_u = \underline{Z}_{ii} + \underline{Z}_{kk} - \underline{Z}_{ik} - \underline{Z}_{ki} \tag{8.35}$$

ili za mreže za koje je matrica impedansi čvorova $\underline{\mathbf{Z}}_n$ simetrična matrica:

$$\underline{Z}_u = \underline{Z}_{ii} + \underline{Z}_{kk} - 2\underline{Z}_{ik} \tag{8.36}$$

Dakle *u ovom slučaju ulazna impedansa izmedju čvorova a i b definisana je sopstvenim impedansama čvorova ($\underline{Z}_{ii}$ i $\underline{Z}_{kk}$) i medjusobnim impedansama ($\underline{Z}_{ik}$ i $\underline{Z}_{ki}$).*

Važnu aplikaciju Tevenenove teoreme predstavlja analiza osjetljivosti odziva mreže. U analizi električnih mreža često se postavlja zahtjev za definisanjem promjene neke varijable stanja (npr. struje $\underline{I}$) pri malim promjenama nekog parametra kola (npr. impedanse $\underline{Z}$ za $\Delta\underline{Z}$) kao što je ilustrovano na slici 8.13.

Analiza osjetljivosti definiše promjenu struje $\Delta\underline{I}$ u funkciji promjenljivog parametra $\Delta\underline{Z}$. Za kolo sa slike pogodno je koristiti Tevenenovu teoremu da bi se uspostavila veza izmedju $\Delta\underline{I}$ i $\Delta\underline{Z}$. Za kolo sa slike 8.13 vrijede relacije:

$$\begin{aligned} (\underline{I} + \Delta\underline{I})(\underline{Z}_e + \underline{Z} + \Delta\underline{Z}) &= \underline{V}_0 \\ \underline{I}(\underline{Z}_e + \underline{Z}) + \underline{I}\Delta\underline{Z} + \Delta\underline{I}(\underline{Z}_e + \underline{Z}) + \Delta\underline{I}\Delta\underline{Z} &= \underline{V}_0 \end{aligned} \tag{8.37}$$

Za male promjene $\Delta Z \approx 0$ slijedi $\Delta I \approx 0$ te član $\Delta\underline{I}\Delta\underline{Z}$ predstavlja član drugog reda i može se zanemariti ($\Delta\underline{I}\Delta\underline{Z} = 0$). Uvažavajući da prema Tevenenovoj teoremi vrijedi:

$$\underline{I}(\underline{Z}_e + \underline{Z}) = \underline{V}_0$$

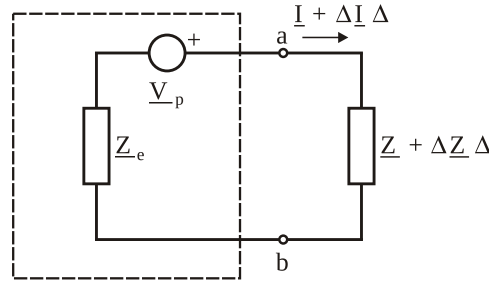


Figure 8.13: Ilustracija analize osjetljivosti

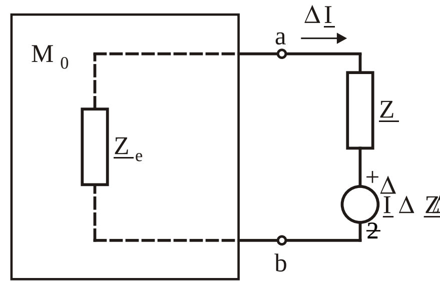


Figure 8.14: Ekvivalentno kola za odredjivanje uticaja promjene parametra $\underline{Z}$

iz relacije 8.37 slijedi:

$$\Delta\underline{I}(\underline{Z}_e + \underline{Z}) \approx -\underline{I}\Delta\underline{Z} \tag{8.38}$$

Odgovarajuće ekvivalentno kolo koje aproksimira uticaj malih promjena parametra kola $\underline{Z}$ prikazano je na slici 8.14.

Promjena struje u priključenoj grani odredjena je relacijom:

$$\Delta\underline{I} = \underline{I}\frac{-\Delta\underline{Z}}{\underline{Z}_e + \underline{Z}} \tag{8.39}$$

Relativna promjena struje $\Delta\underline{I}/\underline{I}$ odredjena je prema Tevenenovoj teoremi relacijom:

$$\frac{\Delta\underline{I}}{\underline{I}} = \frac{-\Delta\underline{Z}}{\underline{Z}_e + \underline{Z}} \tag{8.40}$$

Prema kolu sa slike 8.14 promjene u drugim granama kola (npr. $\Delta\underline{V}_k$) mogu se odrediti rješavanjem odgovarajućeg odziva kola kada je na relaksiranu mrežu M_0 priključen samo strujni generator $\Delta\underline{I}$. Uticaj promjene struje $\Delta\underline{I}$ u posmatranoj grani na napone drugih grana $\Delta\underline{V}_k$ odredjuju elementi matrice impedansi čvorova.